29 de julho de 2021

Física I - Compendium

Victor Lins

Instituto de Física - Universidade de São Paulo,
R. do Matão 1371,
Cidade Universitária, São Paulo, Brasil.

E-mail: victorlins@usp.br

RESUMO. Aqui estão presentes as 6 listas de exercícios disponibilizadas durante o curso de Física I (4302111) no primeiro semestre de 2021, horário noturno, ministrado pela Prof. Dra. Valentina Martelli. Além disso, a minha resolução para todas está disponível em conjunto com as questões. Naturalmente, tenha bom senso e reconheça que podem haver erros nas resoluções, visto que eu sou um *estudante*, mas as questões em si foram transcritas na íntegra através dos documentos originais.

PALAVRAS-CHAVE: Cinemática. Análise Dimensional. Dinâmica. Estática ponto material. Estática do corpo extenso.

Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Física I - 4302111

Profa. Dra. Valentina Martelli

Lista de Problemas I

Victor Hugo dos Santos Lins

Email: victorlins@usp.br

28 de Abril de 2021

Obs.: É indispensável ressaltar que toda análise dimensional estabelece uma *proporcionalidade*, e não necessariamente uma igualdade. Assim, reconheço a existência de uma constante de proporcionalidade $k \in \mathbb{R}$. Entretanto, para o propósito da resolução dessa lista de problemas, assumirei sempre que a professora ao utilizar a terminologia *"depende apenas de"* ou *"é expresso exclusivamente em termos de"* a constante de proporcionalidade valerá $k = 1$. Dessa forma, para efeitos práticos, nesses contextos, a proporcionalidade *colapsará* para uma igualdade de fato.

Questão 1

As chamadas unidades de Planck são um conjunto de unidades de medida definidas ex- clusivamente em termos de 4 constantes físicas universais: a velocidade da luz no vácuo c, a constante gravitacional G, a constante de Planck $\hbar$ e a constante de Boltzmann k_B.
Utilizando apenas análise dimensional, encontre expressões para as seguintes unidades básicas do Sistema de Planck em termos apenas dessas constantes universais ($c, G, \hbar$ e k_B):

(a) comprimento de Planck

(b) tempo de Planck

(c) massa de Planck

(d) temperatura de Planck

Agora, por fim, calcule a ordem de grandeza no SI das unidades de Planck dos itens acima e expresse o raio do próton em termos do comprimento de Planck.
A Escala de Planck refere-se a quantidades da mesma ordem de grandeza que as unidades de Planck. Na Escala de Planck, as teorias físicas desenvolvidas até hoje não são mais aplicáveis e o desenvolvimento de uma teoria aplicável nessa escala é um dos maiores desafios da física atualmente.

Solução: Como as unidades básicas do Sistema de Planck são obtidas através do produto entre as constantes universais ($c, G, \hbar$ e k_B) ou alguma potência delas, convém avaliar qual é a unidade de um produto genérico entre elas, isto é:

$$[c]^x \cdot [G]^y \cdot [\hbar]^z \cdot [k_B]^a \tag{1}$$

com $x, y, z, a \in \mathbb{R}$.

De imediato, sabe-se que $[c] = L \cdot T^{-1}$ (unidade de velocidade). Para determinar as unidades de $G, \hbar$ e k_B será necessário partir de alguma equação conhecida que envolva cada uma das grandezas, e a partir delas descobrir $[G], [\hbar]$ e $[k_B]$.

Por exemplo, é bem conhecida a lei da gravitação universal:

$$F = \frac{GMm}{d^2}$$

isolando G na equação acima, tem-se:

$$G = \frac{Fd^2}{Mm} \Longrightarrow [G] = \frac{[F] \cdot [d]^2}{[M] \cdot [m]} = \frac{(M \cdot L \cdot T^{-2}) \cdot (L)^2}{(M) \cdot (M)} = L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2}$$

$$\therefore [G] = L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2} \tag{2}$$

Além disso, sabe-se que $\hbar = h/2\pi \Longrightarrow [\hbar] = [h]$ — o que significa que pode-se calcular a unidade de $\hbar$ através da unidade de h. Também é bem conhecida a equação para a energia de um fóton:

$$E = h\nu$$

isolando h na equação acima, obtém-se:

$$h = \frac{E}{\nu} \Longrightarrow [h] = \frac{[E]}{[\nu]} = \frac{(M \cdot L^2 \cdot T^{-2})}{(T^{-1})} = M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$$

$$\therefore [\hbar] = [h] = M \cdot L^2 \cdot T^{-1} \tag{3}$$

Ainda, a fim de determinar a unidade de k_B, pode-se utilizar um outro resultado bem conhecido, dessa vez da teoria cinética dos gases — a energia cinética média por molécula do gás:

$$e_c = \frac{3}{2} k_B T$$

Isolando k_B na equação acima, determina-se:

$$k_B = \frac{2e_c}{3T} \Longrightarrow [k_B] = \frac{[e_c]}{[T]} = \frac{(M \cdot L^2 \cdot T^{-2})}{K} = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot K^{-1}$$

$$\therefore [k_B] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot K^{-1} \tag{4}$$

Utilizando os resultados das eqs. (2-4) na eq. (1), encontra-se:

$$\begin{aligned}[c]^x \cdot [G]^y \cdot [\hbar]^z \cdot [k_B]^a &= (L \cdot T^{-1})^x \cdot (L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2})^y \cdot (M \cdot L^2 \cdot T^{-1})^z \cdot (M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot K^{-1})^a \\ &= L^{x+3y+2z+2a} \cdot M^{-y+z+a} \cdot T^{-x-2y-z-2a} \cdot K^{-a}\end{aligned}$$

$$\therefore [c]^x \cdot [G]^y \cdot [\hbar]^z \cdot [k_B]^a = L^{x+3y+2z+2a} \cdot M^{-y+z+a} \cdot T^{-x-2y-z-2a} \cdot K^{-a} \tag{5}$$

A eq. (5) será extremamente útil para o cálculo de cada uma das unidades básicas do Sistema de Planck. Com efeito, para encontrar a expressão que determina qualquer uma delas, basta estabelecer uma proporcionalidade entre a eq. (5) e a unidade de Planck respectiva.

(a) comprimento de Planck

Seja L_p o comprimento de Planck. Como L_p é um comprimento, então $[L_p] = L$. Dessa forma, se L_p é obtido *exclusivamente* em termos das constantes universais supracitadas, então vale a igualdade:

$$[L_p] = [c]^x \cdot [G]^y \cdot [\hbar]^z \cdot [k_B]^a \Longrightarrow L^1 = L^{x+3y+2z+2a} \cdot M^{-y+z+a} \cdot T^{-x-2y-z-2a} \cdot K^{-a}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2a + x + 3y + 2z = 1 \\ a - y + z = 0 \\ -2a - x - 2y - z = 0 \\ -a = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow a = 0, y = z = \frac{1}{2}, x = -\frac{3}{2}.$$

Portanto, uma vez determinados a, y, z e x, pode-se escrever a expressão que determina o comprimento de Planck:

$$L_p = (c)^{-3/2}(G)^{1/2}(\hbar)^{1/2}(k_B)^0$$

$$\therefore L_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \tag{6}$$

(b) tempo de Planck

Seja t_P o tempo de Planck. Como t_P é da unidade de tempo, então $[t_P] = T$.

O item (b) pode ser resolvido através do mesmo método que o item (a), com a diferença de que a igualdade estabelecida representaria a unidade de tempo. Entretanto, como o comprimento de Planck é uma função de $G, \hbar$ e c, é possível simplificar o processo notando que $t_P = \dfrac{L_p}{c}$. Isso é verdade porque essa razão possui unidade de tempo *(comprimento/velocidade)* e é obtida *exclusivamente* em termos das constantes universais desejadas.

Assim, a expressão que determina t_P é a seguinte:

$$t_P = \frac{L_p}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}}$$

$$\therefore t_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} \tag{7}$$

(c) massa de Planck

Seja m_p a massa de Planck. Como m_p tem unidades de massa, então $[m_p] = M$.

Analogamente ao que foi feito no item (a), será estabelecida uma igualdade entre a eq. (5) e $[m_p]$, acompanhe:

$$[m_p] = [c]^x \cdot [G]^y \cdot [\hbar]^z \cdot [k_B]^a \Longrightarrow M^1 = L^{x+3y+2z+2a} \cdot M^{-y+z+a} \cdot T^{-x-2y-z-2a} \cdot K^{-a}$$

$$\iff \begin{cases} 2a + x + 3y + 2z = 0 \\ a - y + z = 1 \\ -2a - x - 2y - z = 0 \\ -a = 0 \end{cases} \iff a = 0, y = -\frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}.$$

Dessa forma, conhecidos $a, x, y,$ e z, a expressão para m_p fica imediatamente determinada:

$$m_p = (c)^{1/2}(G)^{-1/2}(\hbar)^{1/2}(k_B)^0$$

$$\therefore m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \tag{8}$$

(d) temperatura de Planck

Seja T_p a temperatura de Planck. Sabe-se que T_p possui unidades de temperatura, então $[T_p] = K$.

Analogamente ao que foi feito nos items (a) e (c), firma-se uma igualdade entre a eq. (5) e $[T_p]$, confira:

$$[T_p] = [c]^x \cdot [G]^y \cdot [\hbar]^z \cdot [k_B]^a \Longrightarrow K^1 = L^{x+3y+2z+2a} \cdot M^{-y+z+a} \cdot T^{-x-2y-z-2a} \cdot K^{-a}$$

$$\iff \begin{cases} 2a + x + 3y + 2z = 0 \\ a - y + z = 0 \\ -2a - x - 2y - z = 0 \\ -a = 1 \end{cases} \iff a = -1, y = -\frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}, x = \frac{5}{2}.$$

Assim, $[T_p]$ pode ser expresso por:

$$T_p = (c)^{5/2}(G)^{-1/2}(\hbar)^{1/2}(k_B)^{-1}$$

$$\therefore T_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}} \tag{9}$$

A fim de calcular a ordem de grandeza no SI das unidades básicas do sistema Planck desejadas, adota-se:

- $G = 6,674 \cdot 10^{-11}\ m^3 kg^{-1} s^{-2}$
- $c = 2,997 \cdot 10^{8}\ ms^{-1}$
- $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}\ Js^{-1}$
- $k_B = 1,380 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$

Utilizando as eqs. (6-9), encontra-se:

$$L_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = \sqrt{\frac{(6,674 \cdot 10^{-11}\ m^3kg^{-1}s^{-2})(1,054 \cdot 10^{-34}\ Js^{-1})}{(2,997 \cdot 10^{8}\ ms^{-1})^3}} \approx 1,616 \cdot 10^{-35}\ m.$$

$$t_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = \sqrt{\frac{(6,674 \cdot 10^{-11}\ m^3kg^{-1}s^{-2})(1,054 \cdot 10^{-34}\ Js^{-1})}{(2,997 \cdot 10^{8}\ ms^{-1})^5}} \approx 5,393 \cdot 10^{-44}\ s.$$

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = \sqrt{\frac{(1,054 \cdot 10^{-34}\ Js^{-1})(2,997 \cdot 10^{8}\ ms^{-1})}{6,674 \cdot 10^{-11}\ m^3kg^{-1}s^{-2}}} \approx 2,175 \cdot 10^{-8}\ kg.$$

$$T_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}} = \sqrt{\frac{(1,054 \cdot 10^{-34}\ Js^{-1})(2,997 \cdot 10^{8}\ ms^{-1})^5}{(6,674 \cdot 10^{-11}\ m^3kg^{-1}s^{-2})(1,380 \cdot 10^{-23} JK^{-1})^2}} \approx 1,416 \cdot 10^{32}\ K.$$

Portanto, através dos resultados acima, pode-se determinar qual é a ordem de grandeza de cada uma das desejadas unidades básicas do sistema de Planck.

É importante ressaltar que como ($t_P \approx 5,393 \cdot 10^{-44}\ s$) a ordem de grandeza não será simplesmente 10^{-44}, mas sim 10^{-43}, uma vez que $5,393$ está mais próximo de 10 do que de 1.

$$(O.G)_{L_p} = 10^{-35} \tag{10}$$

$$(O.G)_{t_p} = 10^{-43} \tag{11}$$

$$(O.G)_{m_p} = 10^{-8} \tag{12}$$

$$(O.G)_{T_p} = 10^{32} \tag{13}$$

Por fim, utilizando a estimativa para o raio do próton segundo Bezginov et al. em "*A measurement of the atomic hydrogen Lamb shift and the proton charge radius*", isto é, $r_p \approx 0,833 \cdot 10^{-15}\ m$, pode-se expressar r_p em termos do comprimento de Planck fazendo:

$$\eta = \frac{r_p}{L_p} = \frac{(0,833 \cdot 10^{-15}\ m)}{(1,616 \cdot 10^{-35}\ m)} = 5,425 \cdot 10^{19} \Longrightarrow r_p = \eta L_p$$

$$\therefore r_p = 5,425 \cdot 10^{19} L_p \tag{14}$$

Esse é um resultado não tão intuitivo de primeira vista, porque na *física clássica* tem-se o raio do próton como referência de algo extremamente diminuto, mas percebe-se que mesmo esse raio é ainda 10^{20} ordens de grandeza maior que o comprimento de Planck, que por sua vez representa bem a extremidade da *escala quântica*.

Questão 2

A equação diferencial de movimento de um oscilador harmônico amortecido é dada por

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0$$

onde x é a posição do objeto, a primeira derivada é sua velocidade, a segunda derivada é a sua aceleração e m sua massa.
A solução dessa equação possui três casos diferentes dependendo da relação entre as constantes c, k e m. Uma das soluções é o caso subamortecido, onde a equação de movimento da posição em função do tempo neste caso é dada por:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi)$$

(a) Utilizando análise dimensional, determine as unidades das constantes c, k, A, da constante de amortecimento γ, da frequência de oscilação ω e da fase ϕ.

(b) A constante de amortecimento depende apenas da constante c e da massa, enquanto a chamada frequência de ressonância não amortecida ω_0 (cuja unidade é de inverso do tempo, isto é, T^{-1}) depende apenas do coeficiente k e também da massa. Estime expressões para γ e ω_0 através da análise dimensional.

Solução:

(a) Note que na equação diferencial de movimento de um oscilador harmônico amortecido, sendo a segunda derivada de x a aceleração do objeto, o termo $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = ma$ possui unidades de *Força*, afinal:

$$F = ma \tag{15}$$

Portanto, como todos os outros termos da equação diferencial estão sendo somados com $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, é necessário que para a equação ser dimensionalmente coerente cada um dos termos possua individualmente dimensões de força, isto é:

$$\left[m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right] = \left[c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right] = [kx] = [F] = M \cdot L \cdot T^{-2} \tag{16}$$

$$\iff [c \cdot v] = [c] \cdot [v] = [c] \cdot (\cancel{L} \cdot T^{-1}) = M \cdot \cancel{L} \cdot T^{-2} \therefore [c] = M \cdot T^{-1} \tag{17}$$

$$\iff [k \cdot x] = [k] \cdot [x] = [k] \cdot \cancel{L} = M \cdot \cancel{L} \cdot T^{-2} \therefore [k] = M \cdot T^{-2} \tag{18}$$

Além disso, a equação de movimento da posição em função do tempo implica que $[A] = L$, uma vez que $[x(t)] = L = [Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi)] = [A]$. Com efeito, os termos $e^{-\gamma t}$ e $\cos(\omega t + \phi)$ são grandezas adimensionais. Destacando o resultado:

$$[A] = L \tag{19}$$

Ainda, como $e^{-\gamma t}$ e $\cos(\omega t + \phi)$ são adimensionais, é obrigatório que:

$$[-\gamma t] = [\gamma] \cdot [t] = [\gamma] \cdot T = 1 \therefore [\gamma] = T^{-1} \tag{20}$$

$$[(\omega t + \phi)] = 1 \iff [\omega t] = [\phi] = 1$$

$$\therefore [\omega] = T^{-1} \tag{21}$$

$$\therefore [\phi] = 1 \text{ (adimensional)} \tag{22}$$

Portanto, as unidades de c, k, A, γ, ω e ϕ estão expressas pelas eqs. (17-22), respectivamente.

(b) Como a constante de amortecimento depende *apenas* da constante c e da massa m, então é imediato que

$$[\gamma] = [c]^x \cdot [m]^y \tag{23}$$

onde deseja-se encontrar x e y para que a eq. (23) se torne dimensionalmente coerente. Com efeito,

$$[\gamma] = T^{-1} = [c]^x \cdot [m]^y = (M \cdot T^{-1})^x \cdot (M)^y = M^{x+y} \cdot T^{-x}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ -x = -1 \end{cases} \iff x = 1,\ y = -1$$

Portanto, uma vez determinados x e y, pode-se substituir os valores encontrados na eq. (23) e obter a expressão para γ. Confira:

$$\gamma = (c)^1 (m)^{-1}$$

$$\therefore \gamma = \frac{c}{m} \tag{24}$$

Além disso, sabendo que a frequência de ressonância não amortecida ω_0 depende *apenas* do coeficiente k e da massa m, segue que

$$[\omega_0] = [k]^x \cdot [m]^y \tag{25}$$

onde, mais uma vez, precisa-se determinar x e y de modo que a eq. (25) esteja dimensionalmente coerente. Como $[\omega_0] = T^{-1}$, tem-se:

$$[\omega_0] = T^{-1} = (M \cdot T^{-2})^x \cdot (M)^y = M^{x+y} \cdot T^{-2x}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ -2x = -1 \end{cases} \therefore x = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2}$$

Por fim, a frequência de ressonância não amortecida ω_0 é obtida substituindo na eq. (25) os valores de x e y encontrados acima, ou seja:

$$\omega_0 = (k)^{1/2} (m)^{-1/2}$$

$$\therefore \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{26}$$

Questão 3

Dois carros desavisados estão se movimentando em uma pista estreita. No instante t_0 o carro A possui velocidade e aceleração, em relação ao solo, respectivamente dadas pelos vetores $\vec{v}_A = (v_A, 0, 0)$ e $\vec{a}_A = (-a_A, 0, 0)$. No instante t_0 o carro B possui velocidade e aceleração, em relação ao solo, respectivamente dadas pelos vetores $\vec{v}_B = (-v_B, 0, 0)$ e $\vec{a}_B = (a_B, 0, 0)$. Considere $v_i, a_i > 0, i = A, B$ e as acelerações constantes.

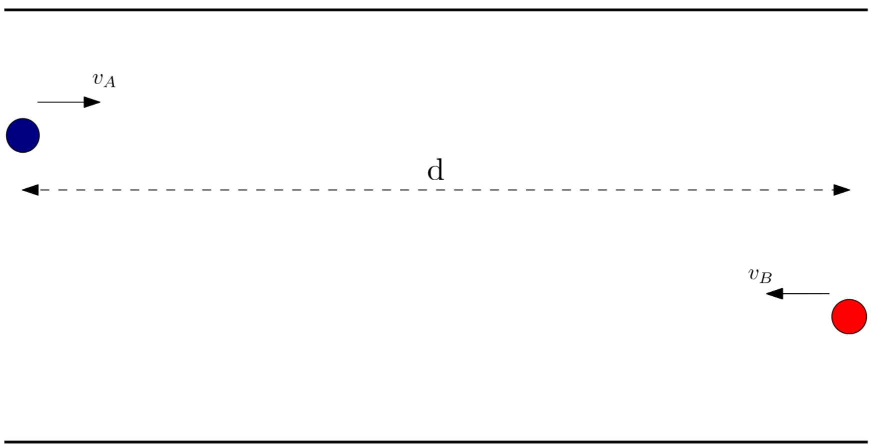
(a) Considerando que no instante t_0 os carros estão a uma distância d entre si. Quantos cruzamentos podem ocorrer? Sob quais condições? Em quais instantes?

(b) Determine a distância percorrida por cada um dos carros entre o instante t_0 e o instante do último cruzamento, no caso em que o número de cruzamentos é máximo. Considere todas as possibilidades de velocidade e aceleração.

Dica: Haverá três casos distintos que você precisará considerar, para poder tomar em conta todas as possibilidades de velocidade e aceleração.

Solução:

(a) No instante t_0, a configuração do sistema segue a ilustração a seguir:



Utilizando os dados informados no enunciado, é possível escrever a equação horária da posição para cada um dos carros. Para tanto, será *assumido* que é positivo o sentido horizontal para a direita, que a origem do sistema de coordenadas se localiza na posição inicial do corpo A, e também que o referencial é um observador externo aos carros. Assim, tem-se:

$$x_A = v_A(t - t_0) - \frac{1}{2}a_A(t - t_0)^2 \tag{27}$$

$$x_B = d - v_B(t - t_0) + \frac{1}{2}a_B(t - t_0)^2 \tag{28}$$

Para avaliar os cruzamentos, a condição aplicada será $x_A = x_B$, afinal, o significado do cruzamento é o de que os móveis passam pela mesma coordenada x um do outro. Confira:

$$x_A = x_B \implies v_A(t - t_0) - \frac{1}{2}a_A(t - t_0)^2 = d - v_B(t - t_0) + \frac{1}{2}a_B(t - t_0)^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}(a_A + a_B)(t - t_0)^2 - (v_A + v_B)(t - t_0) + d = 0 \tag{29}$$

Observe que essa é uma função do 2° grau em $(t - t_0)$. Esse tipo de função pode ter duas raízes reais distintas, duas raízes reais iguais (uma raiz dupla) e ainda não nenhuma ter raíz real. A interpretação é a de que podem existir dois, um ou zero instantes de tempo em que as posições se igualam, ou seja, podem ocorrer dois, um ou nenhum *cruzamento*.

A condição que determina a quantidade de cruzamentos entre os carros é oriunda da matemática, isto é:

- Para $\Delta > 0$, $\exists$ 2 raízes reais distintas $\implies$ 2 cruzamentos.
- Para $\Delta = 0$, $\exists$ 2 raízes reais iguais (raíz dupla) $\implies$ 1 cruzamento.
- Para $\Delta < 0$, $\nexists$ raízes reais $\implies$ 0 cruzamentos.

onde Δ é o discriminante da equação do 2° grau. Calculando Δ para a eq. (29), tem-se:

$$\Delta = (-(v_A + v_B))^2 - 4\left(\frac{1}{2}(a_A + a_B)\right)(d) = (v_A + v_B)^2 - 2d(a_A + a_B)$$

Pode-se, agora, escrever a condição que determina a quantidade de cruzamentos em função das variáveis do problema, acompanhe:

$$\Delta > 0 \implies (v_A + v_B)^2 - 2d(a_A + a_B) > 0 \implies d < \frac{(v_A + v_B)^2}{2(a_A + a_B)} \tag{30}$$

$$\Delta = 0 \implies (v_A + v_B)^2 - 2d(a_A + a_B) = 0 \implies d = \frac{(v_A + v_B)^2}{2(a_A + a_B)} \tag{31}$$

$$\Delta < 0 \implies (v_A + v_B)^2 - 2d(a_A + a_B) < 0 \implies d > \frac{(v_A + v_B)^2}{2(a_A + a_B)} \tag{32}$$

Dessa forma, quaisquer que sejam as intensidades v_A, v_B, a_A e a_B, calcula-se a razão $r = \dfrac{(v_A + v_B)^2}{2(a_A + a_B)}$ e compara-se com o valor de d. As possíveis conclusões são as seguintes:

- Se $d < r \implies$ 2 cruzamentos.
- Se $d = r \implies$ 1 cruzamento.
- Se $d > r \implies$ 0 cruzamentos.

Com efeito, esse resultado faz sentido, pois quanto menor for d mais próximos os carros estão um do outro e se torna *mais provável* que ocorra um ou dois cruzamentos. Além disso, é coerente que haja um valor de d tal que os carros não consigam se cruzar, afinal, eles estão sendo desacelerados para sentidos opostos, o que significa que se não estiverem suficientemente perto um do outro, sua velocidade trocará de sentido antes que se cruzem.

Ademais, os instantes de tempo em que ocorrem os cruzamentos são encontrados justamente resolvendo a eq. (29), isto é, determinando suas raízes. Para tanto, pode-se aplicar a fórmula de Bhaskara e serão automaticamente determinados os instantes em que os carros se cruzam, se é que realmente se cruzam. Confira:

$$(t - t_0) = \frac{(v_A + v_B) \pm \sqrt{(v_A + v_B)^2 - \cancelto{2}{4}\left(\frac{1}{\cancel{2}}(a_A + a_B)\right)(d)}}{\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}(a_A + a_B)\right)}$$

$$\therefore t - t_0 = \frac{(v_A + v_B)}{(a_A + a_B)}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2d(a_A + a_B)}{(v_A + v_B)^2}}\right] \tag{33}$$

Note que na eq. (33) há a presença do $\pm$. Ele *representa* os dois instantes de tempo que podem vir a existir caso $\Delta > 0$, pois t_1 — o instante de tempo em que ocorre o primeiro cruzamento — será calculado utilizando o "–", enquanto que t_2 — o instante de tempo em que ocorre segundo cruzamento — será calculado utilizando o "+", posto que de fato hajam dois cruzamentos.

Caso $\Delta = 0$, o termo dentro da raiz irá para zero e por isso o $\pm$ *desaparece* — o equivalente a existir um único tempo em que os carros se cruzam.

Ainda, caso $\Delta < 0$, o termo dentro da raiz será um número negativo, que não pertence ao domínio da função real $f(x) = \sqrt{x} \implies$ não há cruzamento.

(b) No caso em que o número de cruzamentos é maximo, foi visto no item (a) que esse número deve ser exatamente igual a 2.

Por essa razão, como é desejada a distância percorrida por cada um dos carros entre t_0 e o instante do último cruzamento, o que será feito é usar a interpretação gráfica de que a área abaixo de um gráfico $v \times t$ é o deslocamento entre os dois instantes de tempo.

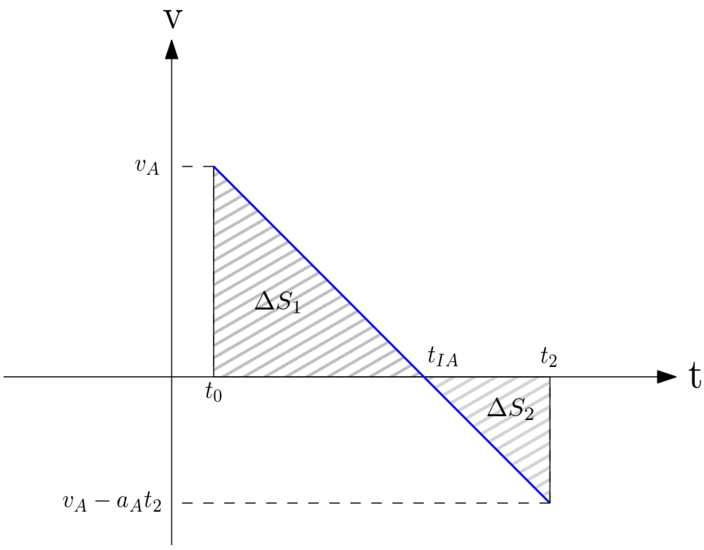
Contudo, é indispensável reconhecer que os deslocamentos podem ser negativos na ida ou na volta, o que implica que será necessário considerar o *módulo* dos deslocamentos entre t_0 e t_I e entre t_I e t_2, onde t_I é o instante de inversão de velocidade, de forma que o resultado obtido pela soma do *módulo* dos deslocamentos será a *distância percorrida*. Acompanhe:

- Distância percorrida pelo carro A (d_A)

  Calcula-se o tempo em que o carro A inverte o sentido da sua velocidade devido ao sentido contrário da aceleração:

  $$0 = v_A - a_A t_{IA} \therefore t_{IA} = \frac{v_A}{a_A} \tag{34}$$

  A distância percorrida pelo carro A entre t_0 e t_2 é dada pela área abaixo do gráfico $v \times t$ para o carro A, considerando o módulo das partes que forem negativas. Observe o gráfico abaixo:

  Pode-se concluir do gráfico que a distância total percorrida pelo carro A é

  $$d_A = \frac{v_A(t_{IA} - t_0)}{2} + \frac{(t_2 - t_{IA})\,|(v_A - a_A t_2)|}{2} \tag{35}$$

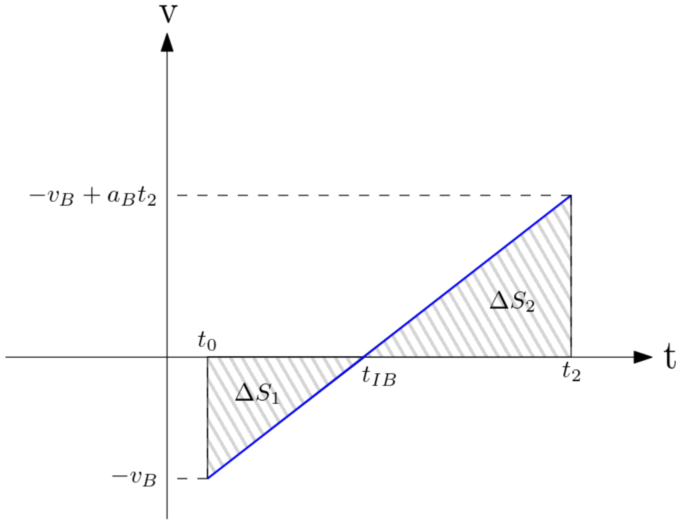
  Note que essa equação lida com qualquer *subcaso* que possa ocorrer, porque é considerado o módulo no segundo termo.

- Distância percorrida pelo carro B (d_B)

  Analogamente ao que foi feito para o carro A, calcula-se o instante de tempo em que ocorre a inversão do sentido da velocidade do carro B:

$$0 = -v_B + a_B t_{IB} \therefore t_{IB} = \frac{v_B}{a_B} \quad (36)$$

Desenhando o gráfico $v \times t$ para o carro B, tem-se:



Dessa forma, a distância percorrida pelo carro B é dada por:

$$d_B = \frac{v_B(t_{IB} - t_0)}{2} + \frac{(t_2 - t_{IB})\,|(-v_B + a_B t_2)|}{2} \quad (37)$$

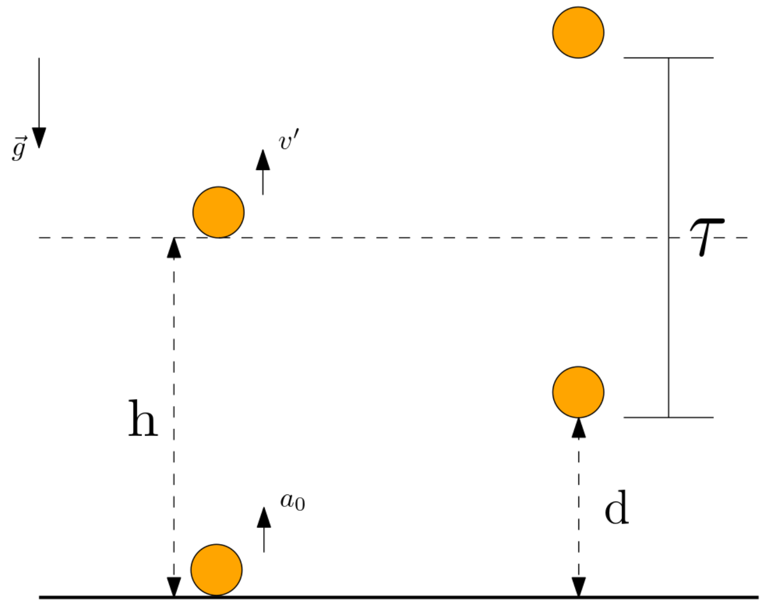
Questão 4

Um passarinho audacioso deseja voar até a lua. O passarinho parte do solo com uma aceleração $\vec{a}_0 = (0, a_0, 0)$, em relação ao solo. No entanto, exausto, após ter mantido sua aceleração constante até atingir uma altura h em relação ao solo, ele subitamente adormece e para de bater suas asas. Ele irá acordar apenas após um tempo τ após ter adormecido, ainda assim, antes de colidir com o solo. Considere a aceleração da gravidade $\vec{g} = (0, g, 0)$.

(a) Em qual distância do chão o passarinho irá acordar após ter adormecido? Qual condição deve ser imposta sobre τ para que o passarinho acorde antes de bater no chão?

(b) Qual a aceleração (com módulo mínimo) que o passarinho terá de obter para não colidir com o chão? Sua resposta deve ser dada em termos de vetores.

Solução: A fim de entender melhor o que acontece no problema, faço o seguinte diagrama:



Adotando o referencial no solo e o sentido positivo como sendo vertical e para cima, o passarinho se desloca uma altura h em relação ao solo e subitamente adormece, parando de bater as suas asas $\implies$ perde a aceleração oriunda da sua aerodinâmica.

A partir desse momento, o passarinho inicia um movimento retilíneo uniformemente variado com aceleração $-g$. Convém prestar atenção às referências ao diagrama para compreender o passo a passo da solução a seguir.

(a) Durante o tempo de voo de subida o passarinho estava sob uma aceleração constante a_0 para cima, o que significa que quando suas asas param de bater e ele perde a sua aceleração, ainda possui uma velocidade vertical para cima v', oriunda da aceleração precedente.

Essa velocidade vertical pode ser calculada utilizando a equação de Torricelli:

$$(v')^2 = \cancelto{0}{v_0^2} + 2a_0\cancelto{h}{\Delta y} \implies v' = \sqrt{2a_0h} \tag{38}$$

Pode-se, ainda, escrever a equação da posição do passarinho em função do tempo após ele cruzar a altura h:

$$y(t) = h + v't - \frac{1}{2}gt^2 = h + t\sqrt{2a_0h} - \frac{1}{2}gt^2 \tag{39}$$

Note que essa equação vale para qualquer instante de tempo t após o passarinho cruzar a altura h. Com efeito, deseja-se encontrar a distância d que o passarinho se encontra do chão depois de passado um tempo igual a τ, então substituí-se $t = \tau$ na equação. Confira:

$$d = h + v'\tau - \frac{1}{2}g\tau^2 = h + \tau\sqrt{2a_0h} - \frac{1}{2}g\tau^2 \tag{40}$$

Assim, fica determinada pela equação acima a distância d acima do chão em que se encontra o passarinho no momento em que desperta do seu sono.

É necessário, também, que τ seja menor do que o tempo que o passarinho levaria para se deslocar de h a zero contando com a sua subida e descida, afinal, se fosse maior ou igual a esse tempo, isso significaria que daria tempo do passarinho colidir com o chão.

Para fazer tal comparação, primeiro precisa-se determinar qual é o instante de tempo em que o passarinho colidiria com o chão caso não acordasse. A fim de encontrar esse resultado, pode-se tomar $y(t) = 0$ na equação da posição em função do tempo do passarinho. Observe:

$$0 = h + t\sqrt{2a_0h} - \frac{1}{2}gt^2 \implies t_c = \frac{\sqrt{2a_0h}}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{g}{a_0}}\right)$$

Onde t_c é a raíz positiva da equação do segundo grau em t encontrada, isto é, o instante em que o passarinho supostamente colidiria com o chão. Para que isso não aconteça, deve-se impor que $\tau < t_c$, isto é

$$\tau < \frac{\sqrt{2a_0h}}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{g}{a_0}}\right) \tag{41}$$

(b) Pode-se utilizar o último resultado do item (a) para escrever:

$$\tau^2 < \frac{2a_0h}{g^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{g}{a_0}}\right)^2$$

Pois tanto o lado direito quanto o lado esquerdo são estritamente positivos (via imagem da função $f(x) = \sqrt{x}$).

Isolando o a_0, tem-se:

$$a_0 > \frac{1}{2h}\left[\frac{g\tau}{1 + \sqrt{1 + \frac{g}{a_0}}}\right]^2 \tag{42}$$

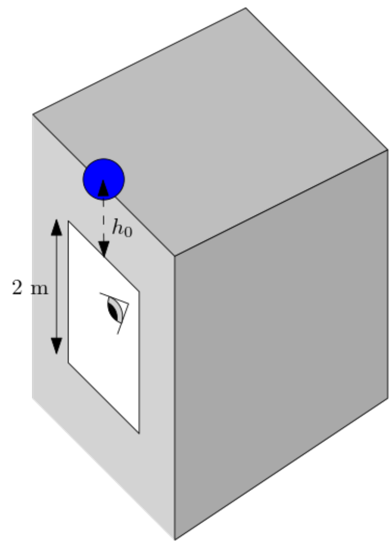
Dessa forma, tomando-se como o caso limite em que o pássaro está na iminência de colidir com o solo, o a_0 mínimo que o faz conseguir alçar voo antes que efetivamente se choque com o chão é tal que a inequação acima se torna exatamente uma equação, ou seja

$$a_{0_{min}} = \frac{1}{2h}\left[\frac{g\tau}{1+\sqrt{1+\frac{g}{a_0}}}\right]^2 \qquad (43)$$

Questão 5

Um estudante vê um balão d'água cair verticalmente pela janela de sua moradia. Tentando descobrir quem pode ter jogado o balão, ele estima que o balão levou 0.15 s do topo à base da sua janela, que tem 2 m de altura. Assumindo que o balão foi solto em repouso, quantos metros acima de sua janela está a pessoa que soltou o balão?

Solução: Para ilustrar o problema, faço o seguinte desenho:



Neste desenvolvimento, será considerado um referencial externo ao balão e em repouso em relação ao estudante. Além disso, o sentido positivo como vertical para baixo.

Sabe-se que o balão demora um intervalo de tempo $\Delta t = 0.15$ s para percorrer a distância entre o topo da janela e a base da janela, isto é, 2 m.

No momento em que o balão se encontra no topo da janela, ele possui uma certa velocidade v_{topo}, oriunda da aceleração da gravidade que atua no mesmo desde o seu ponto de partida, a uma altura h_0 do topo da janela.

Como se trata de um movimento acelerado com aceleração $g = +9,81\, m/s^2$, valem as relações:

$$v^2 = v_0^2 + 2g\Delta y \tag{44}$$

$$\Delta y = v_o \Delta t + \frac{1}{2} g(\Delta t)^2 \tag{45}$$

O método empregado para a solução da questão será o seguinte:

1. Tomar como referência um movimento que inicia do topo da janela e vai até a sua base e calcular a velocidade inicial do balão para esse movimento, utilizando a eq. (45).
2. Tomar como referência um movimento que começa na posição do balão antes de iniciar a queda livre e termina quando ele atinge o topo da janela, e calcular $h_0 = \Delta y$ na eq. (44).

Confira:

1. Na eq. (45), toma-se o deslocamento vertical entre o topo e a base da janela $\Delta y = 2\, m$, o intervalo de tempo $\Delta t = 0,15\, s$ para o balão percorrer essa distância, e também a velocidade inicial $= v_{topo}$.

$$2 = 0,15 v_0 + \frac{1}{2}(9,81)(0.15)^2 \iff v_0 \approx 12,6\, m/s. \tag{46}$$

2. Na eq. (44), toma-se o deslocamento vertical $\Delta y = h_0$ entre o início da queda livre e o topo da janela, $v_0 = 0$ pois o balão parte do repouso e $v = v_{topo}$ que é a velocidade calculada na eq. (46) para o momento em que o balão de fato se encontra no topo da janela. Dessa forma, tem-se:

$$(v_{topo})^2 = 2gh_0 \iff h_0 = \frac{v_{topo}^2}{2g} = \frac{12,6^2}{2 \cdot 9,81} \approx 8,1\, m. \tag{47}$$

Portanto, a pessoa que soltou o balão está a uma distância de $h_0 \approx 8,1\, m$ acima da janela do estudante.

Questão 6

A velocidade em função do tempo para uma partícula movendo-se em uma dimensão está ilustrada na figura 1.

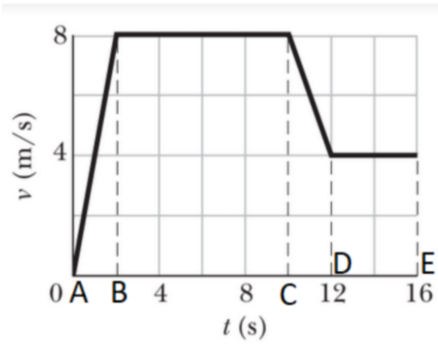


Figura 1

(a) Qual a aceleração média nos intervalos AB, BC, CD e DE?

(b) Quão longe está a partícula da sua distância inicial após 16 s?

(c) Esboce a posição da partícula em função do tempo.

Solução:

(a) Seja a_{AB}, a_{BC}, a_{CD} e a_{DE} a aceleração média nos intervalos AB, BC, CD e DE, respectivamente. Cada uma dessas acelerações é encontrada através de $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$.

Avaliando o gráfico, pode-se notar que:

- $v_A = 0\ m/s,\ v_B = 8\ m/s,\ t_A = 0\ s,\ t_B = 2\ s \Longrightarrow a_{AB} = \dfrac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = 4\ m/s^2;$
- $v_B = 8\ m/s,\ v_C = 8\ m/s,\ t_B = 2\ s,\ t_C = 10\ s \Longrightarrow a_{BC} = \dfrac{v_C - v_B}{t_C - t_B} = 0\ m/s^2;$
- $v_C = 8\ m/s,\ v_D = 4\ m/s,\ t_C = 10\ s,\ t_D = 12\ s \Longrightarrow a_{CD} = \dfrac{v_D - v_C}{t_D - t_C} = -2\ m/s^2;$
- $v_D = 4\ m/s,\ v_E = 4\ m/s,\ t_D = 12\ s,\ t_E = 16\ s \Longrightarrow a_{DE} = \dfrac{v_E - v_D}{t_E - t_D} = 0\ m/s^2;$

(b) O deslocamento realizado pela partícula após um determinado intervalo de tempo Δt é numericamente igual à área abaixo do gráfico $v \times t$, entre o respectivo intervalo de tempo Δt.

Dessa forma, sabendo que o deslocamento desejado se dá sob o intervalo de tempo de 16 s e que a área total S abaixo do gráfico $v \times t$ entre esses 16 s pode ser encontrada através da soma de áreas menores $S_{AB} + S_{BC} + S_{CD} + S_{DE}$, respectivamente entre os intervalos de tempo $(\Delta t)_{AB} = (t_B - t_A)$, $(\Delta t)_{BC} = t_C - t_B$, $(\Delta t)_{CD} = t_D - t_C$, $(\Delta t)_{DE} = t_E - t_D$, tem-se:

$$S = S_{AB} + S_{BC} + S_{CD} + S_{DE} \tag{48}$$

tal que uma análise gráfica da Figura 1 permite concluir que

- S_{AB} é a área de um triângulo de base $b = 2\ s$ e altura $h = 8\ m/s$, isto é:

$$S_{AB} = \frac{b \cdot h}{2} = 8\ m \tag{49}$$

- S_{BC} é a área de um retângulo de base $b = 8\ s$ e altura $h = 8\ m/s$, isto é:

$$S_{BC} = b \cdot h = 64\ m \tag{50}$$

- S_{CD} é a área de um trapézio de base maior $B = 8\ m/s$, base menor $b = 4\ m/s$ e altura $h = 2\ s$, isto é:

$$S_{CD} = \frac{(B + b)h}{2} = 12\ m \tag{51}$$

- S_{DE} é a área de um retângulo de base $b = 4\ s$ e altura $h = 4\ m/s$, isto é:

$$S_{DE} = b \cdot h = 16\ m \tag{52}$$

Assim, utilizando na eq. (48) os resultados das eqs. (49-52), obtemos:

$$S = 8\ m + 64\ m + 12\ m + 16\ m = 100\ m \tag{53}$$

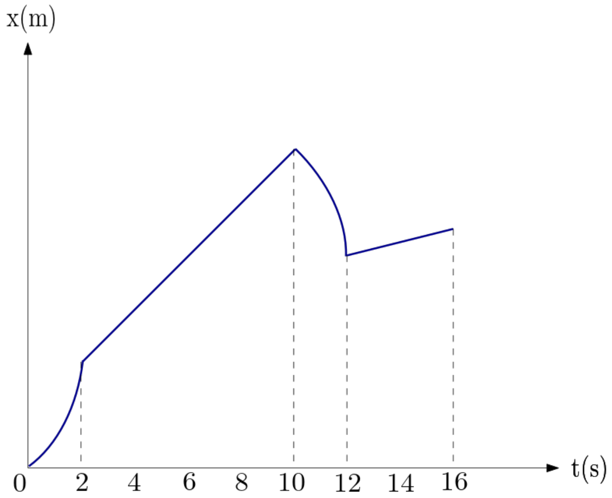
Portanto, após 16 s a partícula está a uma distância de 100 m da sua posição inicial.

(c) O gráfico $v \times t$ exibe um comportamento tal qual é possível afirmar, com o auxílio dos resultados do item (a), que

- entre $t = 0\ s$ e $t = 2\ s$ o movimento da partícula é um MRUV com $a > 0 \Longrightarrow x \times t$ é uma parábola de concavidade positiva nesse intervalo;
- entre $t = 2\ s$ e $t = 10\ s$ o movimento da partícula é um MRU com $v > 0 \Longrightarrow x \times t$ é uma reta crescente nesse intervalo;
- entre $t = 10\ s$ e $t = 12\ s$ o movimento da partícula é um MRUV com $a < 0 \Longrightarrow x \times t$ é uma parábola de concavidade negativa nesse intervalo;

- entre $t = 12\ s$ e $t = 16\ s$ o movimento da partícula é um MRU com $v > 0 \Longrightarrow x \times t$ é uma reta crescente nesse intervalo;

Dessa forma, é possível esboçar um gráfico $x \times t$ que goza das propriedades acima. Confira:



Obs.: além de gozar das propriedades mencionadas, note que nos trechos em que a partícula possui velocidade constante (entre $t = 2\ s$ e $t = 8\ s$ e entre $t = 10\ s$ e $t = 12\ s$), as retas crescentes no gráfico $x \times t$ possui inclinações diferentes, já que estas, por sua vez, representam a intensidade da velocidade no intervalo de tempo mencionado e esses trechos possuem velocidades diferentes, segundo o gráfico fornecido pela Figura 1.

Questão 7

Uma partícula começa a se mover ao longo de uma linha reta da posição de repouso no instante $t = 0$, como descrito em figura 2. Determine:

(a) a velocidade no instante $t = 4\ s$ e $t = 8\ s$

(b) distância percorrida nos primeiros 8 segundos.

(c) Esboce o gráfico da velocidade e da posição em função do tempo.

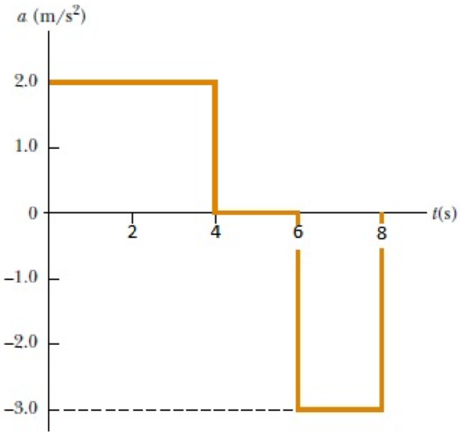


Figura 2

Solução:

(a) Pode-se usar como recurso o gráfico $a \times t$ da Figura 2. Com efeito, a área abaixo do gráfico é numericamente igual a Δv, resultado que é demonstrado notando-se que a área abaixo do gráfico é numericamente igual a integral da aceleração com relação ao tempo, que por sua vez é igual a variação da velocidade.

Note, ainda, que a área total abaixo do gráfico entre $t = 0\ s$ e $t = 8\ s$ pode ser calculada através da soma de áreas menores, isto é, $S_{0,8} = S_{0,4} + S_{4,6} + S_{6,8}$, onde S_{t_1,t_2} denota a área abaixo do gráfico entre os instantes de tempo t_1 e t_2. Analisando o gráfico, é possível concluir que

- $S_{0,4}$ é a área de um retângulo de base $b = 4\ s$ e altura $h = 2,0\ m/s^2$;

$$\implies S_{0,4} = b \cdot h = 4\ s \cdot 2\ m/s^2 = 8\ m/s \implies \Delta v_{0,4} = 8\ m/s \tag{54}$$

- $S_{4,6} = 0$ uma vez que $a = 0$ entre os instantes $t = 4\ s$ e $t = 6\ s$;

$$\implies S_{4,6} = 0 \implies \Delta v_{4,6} = 0\ m/s \tag{55}$$

- $S_{6,8}$ é a área de um retângulo de base $b = 2\ s$ e altura $h = -3\ m/s^2$;

$$\implies S_{6,8} = b \cdot h = 2\ s \cdot (-3)\ m/s^2 = -6\ m/s \implies \Delta v_{6,8} = -6\ m/s \tag{56}$$

onde $\Delta v_{t_1,t_2}$ denota a variação de velocidade entre os instantes de tempo t_1 e t_2.

Dessa forma, utilizando os resultados das eqs. (54-56) é possível afirmar que, como o móvel partiu do repouso e as únicas variações de velocidade se deram na eq. (54) e na eq. (56), a velocidade do móvel em $t = 4\ s$ e $t = 8\ s$ são dadas por

$$v_4 = \Delta v_{0,4} = 8\ m/s \tag{57}$$

$$v_8 = \Delta v_{0,4} + \Delta v_{4,6} + \Delta v_{6,8} = 2\ m/s \tag{58}$$

(b) É possível retirar do gráfico a informação de que, tratando os primeiros 8 segundos como um todo, a posição da partícula em função do tempo possui um gráfico relativamente incomum, entretanto pode-se simplificar a análise do movimento olhando para intervalos de tempo específicos onde a aceleração da partícula é constante.

Com efeito, os intervalos de tempo desejados são praticamente os mesmos intervalos de tempo que foram analisados no item (a), isto é, $(\Delta t_{0,4}), (\Delta t_{4,6})$ e $(\Delta t_{6,8})$, onde denota-se $\Delta t_{t_1,t_2}$ como o intervalo de tempo $t_2 - t_1$.

Utiliza-se como recurso, durante os trechos com aceleração constante, a equação de Torricelli, isto é

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s \tag{59}$$

Ainda, é útil a equação horária do espaço durante os trechos com velocidade constante (aceleração nula), ou seja

$$\Delta x = v\Delta t \tag{60}$$

E a distância percorrida desejada será a soma do $|\Delta s|$ de cada um dos intervalos de tempo tomados como referência. Ademais, retira-se do gráfico e dos cálculos efetuados no item (a) as seguintes informações:

- Para $\Delta t_{0,4}$

$$v_0 = 0\ m/s,\ v_4 = v_0 + \Delta v_{0,4} = 8\ m/s,\ a_{0,4} = 2,0\ m/s^2$$

- Para $\Delta t_{4,6}$

$$v_4 = 8\ m/s,\ v_6 = v_4 + \cancelto{0}{\Delta v_{4,6}} = 8\ m/s,\ a_{4,6} = 0\ m/s^2$$

- Para $\Delta t_{6,8}$

$$v_6 = 8\ m/s,\ v_8 = v_6 + \Delta v_{6,8} = 2\ m/s,\ a_{6,8} = -3\ m/s^2$$

onde v_t denota a velocidade no tempo t e a_{t_1,t_2} denota a aceleração durante o intervalo de tempo $t_2 - t_1$.

Assim, a distância percorrida durante os primeiros 8 segundos $(d_{0,8})$ é dada por

$$d_{0,8} = |\Delta s_{0,4}| + |\Delta s_{4,6}| + |\Delta s_{6,8}| \tag{61}$$

$$\implies d_{0,8} = \underbrace{\left|\frac{v_4^2 - v_0^2}{2a_{0,4}}\right|}_{\Delta s_{0,4}} + \underbrace{|v_4 \Delta t_{4,6}|}_{\Delta s_{4,6}} + \underbrace{\left|\frac{v_8^2 - v_6^2}{2a_{6,8}}\right|}_{\Delta s_{6,8}}$$

$$\implies d_{0,8} = \left|\frac{8^2 - 0^2}{2 \cdot 2}\right| + |8 \cdot (6-4)| + \left|\frac{2^2 - 8^2}{2 \cdot (-3)}\right|$$

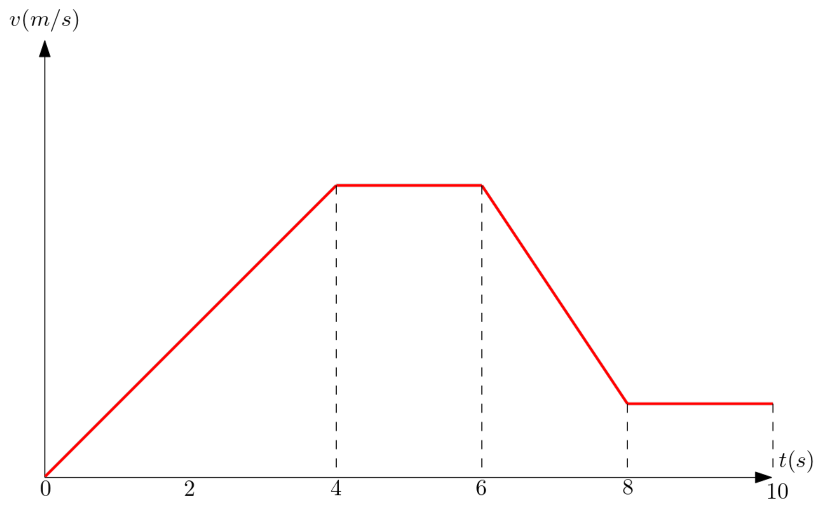
$$\therefore d_{0,8} = 42\ m. \tag{62}$$

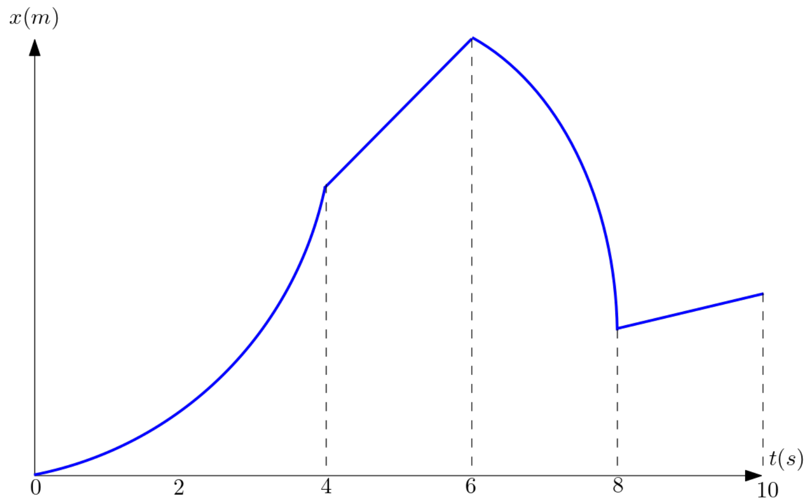
(c) Para esboçar os gráficos corretamente é necessário levar em consideração as seguintes interpretações:

- Sempre que a aceleração for maior que zero, a velocidade será representada como uma reta crescente e a posição como uma parábola de concavidade positiva;
- Sempre que a aceleração for igual a zero, a velocidade será representada como uma reta horizontal e a posição como uma reta crescente ou decrescente, o que vai depender se a velocidade é maior ou menor do que zero, respectivamente;
- Sempre que a aceleração for menor que zero, a velocidade será representada como uma reta decrescente e a posição como uma parábola de concavidade negativa.

Com isso em mente, produz-se os esboços para a velocidade e para a posição entre $t = 0\ s$ e $t = 10\ s$ se encontram, respectivamente, nas duas figuras a seguir†:

†**Obs.:** foi assumido que para $t \geq 8\ s$ a aceleração é nula, apenas para completar o gráfico fornecido na figura 2. Se a professora desejar, pode olhar apenas para o gráfico entre os instantes $t = 0\ s$ e $t = 8\ s$.





Com efeito, observe que a inclinação da reta no gráfico $x \times t$ entre $t = 4\ s$ e $t = 6\ s$ e entre $t = 8\ s$ e $t = 10\ s$ é diferente — a inclinação da primeira é maior que a inclinação da segunda, afinal, a velocidade entre $t = 4\ s$ e $t = 6\ s$ é maior que a velocidade entre $t = 8\ s$ e $t = 10\ s$.

Questão 8

Com intuito de treinarmos alguns conceitos básicos sobre operações vetoriais vamos trabalhar em alguns problemas físicos que necessitam diretamente destes conceitos.

(a) Considere uma pessoa caminhando com uma velocidade $\vec{v}_p = (1, v_y, 0)\ m/s$ e um cachorro com uma velocidade $\vec{v}_c = (2, 3, 0)\ m/s$ em relação ao mesmo referencial. Quais são os possíveis valores de v_y para que a pessoa esteja com uma velocidade relativa de módulo $5\ m/s$ em relação ao cão. (Isso seria possível para uma pessoa?)

(b) Considere um pássaro azul viajando com uma velocidade $\vec{v}_a = (1, 2, 3)$ e uma pássaro verde com uma velocidade $\vec{v}_v = (3, 4, 5)$. Um pássaro preto viaja com uma velocidade de módulo $2\ m/s$ perpendicularmente aos outros dois. Qual o vetor velocidade do pássaro preto?

(c) Qual ângulo a trajetória do pássaro azul faz com a do pássaro verde? E a do pássaro verde com a do preto?

Solução:

(a) A velocidade relativa da pessoa em relação ao cão é dada por $\vec{v}_p - \vec{v}_c = (1, v_y, 0) - (2, 3, 0) = (-1, v_y - 3, 0)$. A condição imposta é que o módulo desse vetor seja igual a $5\ m/s$, isto é:

$$(-1)^2 + (v_y - 3)^2 + 0^2 = 5^2 \iff v_y = 3 \pm \sqrt{24}\ m/s \approx 28,4\ km/h \text{ ou } -6,8\ km/h \quad (63)$$

É razoável pensar que uma pessoa comum consegue correr com uma velocidade de $6,8\ km/h$ em uma determinada direção. Entretanto, para uma velocidade de $28,4\ km/h$, é coerente cogitar que a pessoa teria que estar minimamente em forma e acostumada a correr, posto que o homem mais rápido do mundo, *Usain Bolt*, teve como record atingir uma velocidade de $44,72\ km/h$.

(b) Se o pássaro preto viaja com uma velocidade perpendicular aos outros dois pássaros, é obrigatório que o produto escalar entre a velocidade do pássaro preto e a velocidade de cada um dos outros dois pássaros seja nulo, afinal, o cosseno do ângulo entre eles (90° – perpendicular) é zero.

Além disso, é fornecido pelo enunciado que o módulo da velocidade do pássaro preto deve ser igual a $2\ m/s$. Dessa forma, pode-se escrever três equações para três incógnitas:

$$\vec{v}_p = (v_{px}, v_{py}, v_{pz}) \text{ t.q. } (v_{px})^2 + (v_{py})^2 + (v_{pz})^2 = 2^2 \tag{64}$$

$$\vec{v}_p \cdot \vec{v}_a = (v_{px} + 2v_{py} + 3v_{pz}) = 0 \tag{65}$$

$$\vec{v}_p \cdot \vec{v}_v = (3v_{px} + 4v_{py} + 5v_{pz}) = 0 \tag{66}$$

Resolvendo o sistema de equações pelo método da substituição, encontra-se dois vetores, ambos perpendiculares aos dois pássaros, que possuem módulo igual a $2\ m/s$ (o que era de se esperar, pois existem dois sentidos para uma mesma direção perpendicular aos dois vetores). Escolhendo um dos dois, tem-se:

$$\vec{v}_p = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \tag{67}$$

(c) Como não há menção a acelerações, pode-se admitir que o vetor velocidade dos pássaros é constante, e portanto suas trajetórias são retilíneas. Dessa forma, o ângulo que as trajetórias fazem uma com a outra é o mesmo ângulo que os vetores velocidade fazem um com o outro. Assim, pode-se concluir que o ângulo que a trajetória do pássaro verde faz com a trajetória do pássaro preto é de $\frac{\pi}{2}\ rad$.

Para calcular o ângulo que a trajetória do pássaro azul faz com a do pássaro verde, pode-se avaliar o produto escalar entre eles e isolar o termo $\cos(\theta)$. Confira:

$$\vec{v}_a \cdot \vec{v}_v = (1,2,3) \cdot (3,4,5) = 3 + 8 + 15 = 26,\ \vec{v}_a \cdot \vec{v}_v = |\vec{v}_a||\vec{v}_v| \cos(\theta)$$

$$\therefore \cos(\theta) = \frac{26}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{50}} \implies \theta \approx 10,67°. \tag{68}$$

Questão 9

(a) A posição de uma partícula em função do tempo, viajando pelo espaço, é dada por:

$$x(t) = A + Bt^6$$

onde A e B são constantes. Quais são as dimensões de A e de B? Calcule a velocidade e a aceleração correspondentes.

(b) Uma partícula é sujeita a uma aceleração

$$a(t) = \alpha t$$

onde α é uma constante. Qual a dimensão de α? Encontre a velocidade e a posição em função do tempo. Calcule o espaço percorrido entre o instante inicial $t_0 = 0$ e $t = 1s$. Deixe sua resposta em termos da posição e velocidade inicial da partícula.

Solução:

(a) Para a equação estar dimensionalmente coerente, a unidade presente do lado esquerdo deve ser igual a unidade presente no lado direito. Como, do lado direito, está sendo realizada uma soma, e só é possível somar grandezas de mesma unidade, segue que tanto $[A]$ quanto $[Bt^6]$ possuem a mesma unidade de $[x(t)] = L$, que é a unidade de comprimento. Equacionando, tem-se:

$$[x(t)] = [A] = [Bt^6] = L \tag{69}$$

Segue da eq. (37) que

$$[A] = L \tag{70}$$

$$[Bt^6] = [B] \cdot [t]^6 = [B] \cdot T^6 = L \therefore [B] = L \cdot T^{-6} \tag{71}$$

como $x(t) = A + Bt^6$, a velocidade v e aceleração a da partícula são dadas por

$$v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x(t)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A + Bt^6\right) = \cancelto{0}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Bt^6\right) = 6Bt^5 \tag{72}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(6Bt^5\right) = 30Bt^4 \tag{73}$$

(b) Mais uma vez, para a equação estar dimensionalmente coerente, é necessário que a unidade do lado direito da seja a mesma unidade do lado esquerdo da equação, isto é

$$[a(t)] = L \cdot T^{-2} = [\alpha t] = [\alpha] \cdot [t] = [\alpha] \cdot T^1 \Longrightarrow [\alpha] = \frac{L \cdot T^{-2}}{T^1}$$

$$\therefore [\alpha] = M \cdot T^{-3} \tag{74}$$

Para encontrar a velocidade $v(t)$ basta integrar $a(t)$ uma vez em relação ao tempo, e para encontrar a posição $x(t)$ basta integrar a velocidade uma vez em relação ao tempo. Confira a seguir:

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \mathrm{d}v = a(t)\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \int \mathrm{d}v = \int a(t)\,\mathrm{d}t = \int (\alpha t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int t\,\mathrm{d}t$$

$$v(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + C_1$$

Para determinar a constante de integração C_1 basta considerar $t = 0$ e perceber que $v(0) = v_0 = C_1$, uma vez que em $v(0)$ o termo $\frac{1}{2}\alpha t^2 = 0$. Assim,

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{75}$$

Nesse momento, pode-se encontrar $x(t)$ através de

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \mathrm{d}x = v(t)\,\mathrm{d}t \;\Longrightarrow\; \int \mathrm{d}x = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int \left(v_0 + \frac{1}{2}\alpha t^2\right)\mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow \int \mathrm{d}x = \int v_0\,\mathrm{d}t + \frac{\alpha}{2}\int t^2\,\mathrm{d}t \;\Longrightarrow\; x(t) = v_0 t + \frac{1}{6}\alpha t^3 + C_2$$

Determina-se C_2 considerando o instante $t = 0$ e notando que $x(0) = x_0 = C_2$, uma vez que em $x(0)$ os termos $v_0 t = 0$ e $\frac{1}{6}\alpha t^3 = 0$. Portanto,

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{6}\alpha t^3 \tag{76}$$

Por fim, o *espaço percorrido* $(D)^\dagger$ entre $t = 0\ s$ e $t = 1\ s$ é dado por

$$D = x(1) - x(0) = v_0 + \frac{1}{6}\alpha \tag{77}$$

†**Obs.:** nesse resultado eu assumo que o deslocamento da partícula é igual ao seu espaço percorrido, isto é, que a velocidade não muda o seu sentido durante o intervalo de tempo mencionado. Não há como determinar o espaço percorrido sem assumir isso por causa da arbitrariedade dos valores de α, v_0 e x_0 e sendo $x(t)$ uma cúbica.

Questão 10

Dados os vetores

- $\mathbf{V_1} = -1\mathbf{u_x} + 3\mathbf{u_y} + 4\mathbf{u_z}$
- $\mathbf{V_2} = 3\mathbf{u_x} - 2\mathbf{u_y} - 8\mathbf{u_z}$
- $\mathbf{V_3} = 4\mathbf{u_x} + 4\mathbf{u_y} + 4\mathbf{u_z}$

onde $\mathbf{u_x}, \mathbf{u_y}, \mathbf{u_z}$ são os versores relacionados aos três eixos cartesianos ortogonais.

(a) Calcular explicitamente $\mathbf{V_1} \times (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3})$ e $(\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}) \times \mathbf{V_3}$ e comparar os resultados.

(b) $\mathbf{V_1} \cdot (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3})$ e $(\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}) \cdot \mathbf{V_3}$ e comparar os resultados.

Solução: O produto vetorial $\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}$ entre dois vetores $\mathbf{V_1} = V_{1x}\mathbf{u_x} + V_{1y}\mathbf{u_y} + V_{1z}\mathbf{u_z}$ e $\mathbf{V_2} = V_{2x}\mathbf{u_x} + V_{2y}\mathbf{u_y} + V_{2z}\mathbf{u_z}$ é definido como o determinante a seguir:

$$\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{u_x} & \mathbf{u_y} & \mathbf{u_z} \\ V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} \\ V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} \end{vmatrix} \tag{78}$$

Sabendo disso, para calcular $\mathbf{V_1} \times (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3})$ basta que primeiro se calcule $\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3}$ e depois se calcule o produto vetorial do vetor $\mathbf{V_1}$ com o vetor $\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3}$. O cálculo efetuado para $(\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}) \times \mathbf{V_3}$ é análogo ao efetuado para $\mathbf{V_1} \times (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3})$, mudando-se apenas a ordem com que as operações de produto vetorial são efetuadas.

Além disso, o produto escalar $\mathbf{V_1} \cdot \mathbf{V_2}$ é definido como o somatório a seguir:

$$\mathbf{V_1} \cdot \mathbf{V_2} = V_{1x}V_{2x} + V_{1y}V_{2y} + V_{1z}V_{2z} \tag{79}$$

Logo, para calcular $\mathbf{V_1} \cdot (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3})$ basta que primeiro se calcule $\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3}$ e depois se calcule o produto escalar entre o vetor $\mathbf{V_1}$ e o vetor $\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3}$. O cálculo efetuado para $(\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}) \cdot \mathbf{V_3}$ é análogo ao efetuado para $\mathbf{V_1} \cdot (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3})$.

(a) Conforme a explicação dada acima, calcula-se primeiro $\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3}$:

$$\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{u_x} & \mathbf{u_y} & \mathbf{u_z} \\ 3 & -2 & -8 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(4)\mathbf{u_x} + (-8)(4)\mathbf{u_y} + (3)(4)\mathbf{u_z} - (-2)(4)\mathbf{u_z} - (-8)(4)\mathbf{u_x} - (3)(4)\mathbf{u_y}$$
$$= 24\mathbf{u_x} - 44\mathbf{u_y} + 20\mathbf{u_z}$$

$$\therefore \mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3} = 24\mathbf{u_x} - 44\mathbf{u_y} + 20\mathbf{u_z} \tag{80}$$

Agora, fazendo $\mathbf{V_1} \times (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3})$, tem-se:

$$\mathbf{V_1} \times (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3}) = \begin{vmatrix} \mathbf{u_x} & \mathbf{u_y} & \mathbf{u_z} \\ -1 & 3 & 4 \\ 24 & -44 & 20 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (3)(20)\mathbf{u_x} + (4)(24)\mathbf{u_y} + (-1)(-44)\mathbf{u_z} - (3)(24)\mathbf{u_z} - (4)(-44)\mathbf{u_x} - (20)(-1)\mathbf{u_y} \\ &= 236\mathbf{u_x} + 116\mathbf{u_y} - 28\mathbf{u_z} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{V_1} \times (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3}) = 236\mathbf{u_x} + 116\mathbf{u_y} - 28\mathbf{u_z} \tag{81}$$

Por outro lado, para determinar qual vetor resulta de $(\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}) \times \mathbf{V_3}$, primeiro faz-se $\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}$. Confira:

$$\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{u_x} & \mathbf{u_y} & \mathbf{u_z} \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (3)(-8)\mathbf{u_x} + (4)(3)\mathbf{u_y} + (-1)(-2)\mathbf{u_z} - (3)(3)\mathbf{u_z} - (4)(-2)\mathbf{u_x} - (-8)(-1)\mathbf{u_y} \\ &= -16\mathbf{u_x} + 4\mathbf{u_y} - 7\mathbf{u_z} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2} = -16\mathbf{u_x} + 4\mathbf{u_y} - 7\mathbf{u_z} \tag{82}$$

Em seguida, calcula-se $(\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}) \times \mathbf{V_3}$:

$$(\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}) \times \mathbf{V_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{u_x} & \mathbf{u_y} & \mathbf{u_z} \\ -16 & 4 & -7 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (4)(4)\mathbf{u_x} + (-7)(4)\mathbf{u_y} + (-16)(4)\mathbf{u_z} - (4)(4)\mathbf{u_z} - (-7)(4)\mathbf{u_x} - (4)(-16)\mathbf{u_y} \\ &= 44\mathbf{u_x} + 36\mathbf{u_y} - 80\mathbf{u_z} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{V_1} \times (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3}) = 44\mathbf{u_x} + 36\mathbf{u_y} - 80\mathbf{u_z} \tag{83}$$

Com efeito, percebe-se que $\mathbf{V_1} \times (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3}) \neq (\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}) \times \mathbf{V_3}$, ou seja, o produto vetorial nem sempre é *associativo*.

(b) Aproveitando o resultado da eq. (80), tem-se que $\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3} = 24\mathbf{u_x} - 44\mathbf{u_y} + 20\mathbf{u_z}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{V_1} \cdot (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3}) &= (-1\mathbf{u_x} + 3\mathbf{u_y} + 4\mathbf{u_z}) \cdot (24\mathbf{u_x} - 44\mathbf{u_y} + 20\mathbf{u_z}) \\
&= ((-1)(24) + (3)(-44) + (4)(20)) = -76.
\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{V_1} \cdot (\mathbf{V_2} \times \mathbf{V_3}) = -76 \tag{84}$$

Ademais, aproveitando o resultado da eq. (82), tem-se que $\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2} = -16\mathbf{u_x} + 4\mathbf{u_y} - 7\mathbf{u_z}$. Logo,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}) \cdot \mathbf{V_3} &= (-16\mathbf{u_x} + 4\mathbf{u_y} - 7\mathbf{u_z}) \cdot (4\mathbf{u_x} + 4\mathbf{u_y} + 4\mathbf{u_z}) \\
&= ((-16)(4) + (4)(4) + (-7)(4)) = -76.
\end{aligned}$$

$$(\mathbf{V_1} \times \mathbf{V_2}) \cdot \mathbf{V_3} = -76 \tag{85}$$

Pode-se perceber que os resultados das eqs. (84) e (85) são exatamente o mesmo.

Instituto de Física da USP

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Física I - 4302111
Profa. Dra. Valentina Martelli

Lista de Problemas II

Victor Hugo dos Santos Lins

Email: victorlins@usp.br

20 de Maio de 2021

Questão 1

Uma criança está brincando com um drone que possui um sistema que registra sua posição, em metros, relativa ao ponto em que foi ligado a cada 0.5 s. Com base nisso, responda às seguintes questões:

(a) Quantos pontos, no mínimo, da posição do drone são necessários para estimar sua velocidade média? E sua aceleração média?

(b) A posição registrada pelo drone em 3 pontos consecutivos foram $\vec{r}_0 = (3,5,2)$, $\vec{r}_1 = (5,6,4)$ e $\vec{r}_2 = (6,8,6)$. Determine a velocidade média do drone em cada um desses intervalos e também no intervalo total.

(c) Na realidade o movimento realizada pelo drone nesse intervalo foi um movimento acelerado. Determine a aceleração média dele nesse intervalo (vetorial e em módulo).

(d) Se ao invés da posição em cada instante, o drone registrasse o módulo da sua velocidade média em cada intervalo, qual seria a aceleração média obtida a partir dos módulos da velocidade média em cada intervalo desses citados no item b?

Solução:

(a) Sabe-se que o sistema registra a posição do drone relativa ao ponto em que foi *ligado* a cada 0.5 s. Com base nisso, já que o drone foi *ligado*, pode-se assumir que sua velocidade inicial era nula, isto é, $\vec{v}_0 = (0,0,0)$.

Pela definição de velocidade média, $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s_f - s_0}{t - \cancelto{0}{t_0}} = \dfrac{s_f - s_0}{t}$, onde consideramos o tempo inicial $t_0 = 0\ s$.

Percebe-se pela definição de velocidade média que precisa-se de **dois pontos** (um *inicial* e um *final*) para poder calcular a mesma. Por exemplo, poderia-se usar a posição inicial do drone e uma outra posição registrada 0.5 s após o início do movimento.

Já a aceleração média, por definição é $a_m = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$, o que significa que precisamos da velocidade em dois instantes de tempo distintos. Como a velocidade em $t = 0$ (relativo ao ponto inicial) é igual a $(0,0,0)$ então basta encontrarmos mais um ponto, porque assim podemos calcular a velocidade média relativa a esse ponto, e dessa forma a aceleração fica determinada pois temos as duas velocidades necessárias e também o intervalo de tempo.

É imprescindível notar que isso é uma aproximação possível mediante o *pequeno* intervalo de tempo $\Delta t = 0.5\ s$ em questão. Isso porque a aceleração média é definida em função das velocidades *instantâneas* entre dois pontos, e não médias. Para resolver essa questão, é necessário aproximar a velocidade instantânea como sendo a média.

Além disso, pode-se argumentar que na verdade seriam necessários três pontos para calcular a aceleração média em um contexto em que não consideramos o ponto de partida do drone. Isso realmente é coerente, porque se esse não for o caso então precisamos calcular duas velocidades médias em registros consecutivos, por exemplo, o que demandaria três posições distintas. Entretanto, como a questão pergunta "quantos pontos, *no mínimo*", admitirei que serão **dois pontos** para calcular a aceleração média, sendo um deles o ponto de partida do drone, cuja velocidade inicial é considerada nula.

(b) Seja $\vec{v}_{i,j}$ a velocidade média entre pontos i e j. Calcula-se as velocidades médias desejadas a seguir:

$$\vec{v}_{0,1} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{0,5} = \frac{(5,6,4) - (3,5,2)}{0,5} = \frac{(2,1,2)}{0,5} = (4,2,4)$$

$$\vec{v}_{1,2} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{0,5} = \frac{(6,8,6) - (5,6,4)}{0,5} = \frac{(1,2,2)}{0,5} = (2,4,4)$$

$$\vec{v}_{0,2} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_0}{1} = \frac{(6,8,6) - (3,5,2)}{1} = \frac{(3,3,4)}{1} = (3,3,4)$$

Onde todas as unidades estão no S.I. Note que para o cálculo de $\vec{v}_{0,1}$ utilizou-se como intervalo de tempo 0,5 s, porque o ponto zero e o ponto um são consecutivos, e o drone registra a posição a cada 0,5 s. Já quando foi desenvolvido o cálculo para $\vec{v}_{0,2}$ utilizou-se como intervalo de tempo 1 s, uma vez que entre o ponto zero e o ponto dois foram tomadas duas medições consecutivas do drone, isto é, $0,5 + 0,5 = 1\ s$.

(c) O intervalo total de tempo entre o ponto zero e o ponto dois é de $\Delta t = 1\ s$. Além disso, é necessário assumir que $\vec{r}_0$ é o vetor posição inicial do drone no seu ponto de partida, e assim a velocidade inicial é nula, como argumentado no item anterior. Sem assumir isso, é impossível determinar a aceleração somente com as informações dadas, porque não se saberia a velocidade inicial em $\vec{r}_0$.

Assim, a aceleração média é determinada através de:

$$\Delta\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a}_m \Delta t^2$$

Que é a equação horária do espaço com velocidade inicial nula. Isolando a aceleração, tem-se:

$$\vec{a}_m = \frac{2\Delta\vec{r}}{\Delta t^2} = 2 \cdot ((6,8,6) - (3,5,2)) = (6,6,8) \implies |\vec{a}_m| = \sqrt{136}\ m/s^2$$

onde utilizou-se que a raiz quadrada da soma dos quadrados das componentes é igual ao módulo do vetor.

(d) Nesse contexto, assume-se que $\vec{v}_0 = (3,5,2)$, $\vec{v}_1 = (5,6,4)$ e $\vec{v}_2 = (6,8,6)$, o que implica que $|\vec{v}_0| = \sqrt{38}$, $|\vec{v}_1| = \sqrt{77}$ e $|\vec{v}_2| = \sqrt{136}$. Mais uma vez, o intervalo de tempo entre dois pontos consecutivos (0 e 1 ou 1 e 2) é de 0,5 s e entre 0 e 2 é de 0,5 + 0,5 = 1 s. Dito isso, calcula-se as acelerações médias em cada um dos intervalos:

$$|\vec{a}_{0,1}| = \frac{\sqrt{77} - \sqrt{38}}{0,5} \approx 5\ m/s^2$$

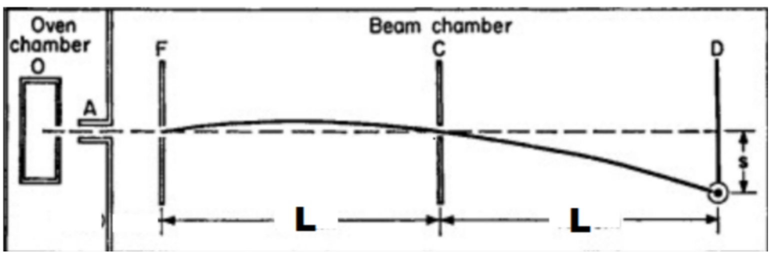
$$|\vec{a}_{1,2}| = \frac{\sqrt{136} - \sqrt{77}}{0,5} \approx 6\ m/s^2$$

$$|\vec{a}_{0,2}| = \frac{\sqrt{136} - \sqrt{38}}{1} \approx 1 \cdot 10^1\ m/s^2$$

onde usou-se para $a_{i,j}$ a mesma convenção utilizada anteriormente para $v_{i,j}$, isto é, que i e j fazem referência aos pontos. As aproximações realizadas foram feitas de forma a manter apenas um algarismo significativo, pois o intervalo de tempo no denominador só possui um significativo.

Questão 2

O experimento descrito neste problema foi realizado por Estermann, Simpson e Stern para testar a predição teórica da distribuição de velocidades de átomos a uma dada temperatura, que mostrou uma boa concordância com a distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann.
Nesse experimento, átomos são evaporados para fora de um forno dentro de um sistema em vácuo. Uma vez que os átomos são ejetados do forno em várias direções, duas fendas (F e C) são utilizadas para colimar o feixe de átomos. As fendas estão no mesmo nível horizontal e separadas a uma distância L. O feixe de átomos é detectado por um detector D que mede a intensidade do feixe e que está a uma distância L da segunda fenda.



(a) Após uma escolha bem esclarecida de referencial, determine a distância s abaixo do nível das fendas onde os átomos atingem o detector. Considere que os átomos são ejetados do forno com uma componente horizontal v_x da velocidade e que a única força atuando é a da gravidade, como indicado pelo vetor $\vec{g}$.

(b) O detector pode ser movido ao longo da direção vertical, de forma que pode-se obter a intensidade do feixe que atinge o detector em função da deflexão s. Com isso, é possível obter uma curva de distribuição de velocidades, a chamada distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann. Em uma dada temperatura de 450 K, para um feixe de átomos de Césio a intensidade máxima ocorre com uma deflexão s = 0.11 mm e para um feixe de Potássio a intensidade máxima ocorre em s = 0.05 mm. Calcule a razão entre as componentes horizontais das velocidades dos átomos de Césio e de Potássio. Qual dos dois elementos possuem, com maior probabilidade, átomos ejetados com velocidades maiores?

(c) Calcule o vetor velocidade dos átomos ao atingir o detector em função da velocidade horizontal v_x, do comprimento L e da aceleração gravitacional.

Solução:

(a) Será adotado como referencial um observador cuja origem do sistema de coordenadas coincida com o orifício da fenda F. Afirma-se que os átomos são ejetados do forno com uma componente horizontal v_x, e também sabe-se que as fendas servem para colimar o feixe. Admite-se um ângulo θ de lançamento, e define-se a velocidade inicial como sendo v_0.

Ademais, pode-se *decompor* o movimento em duas componentes, uma sem aceleração e outra com a presença da aceleração da gravidade:

$$x = v_0 \cos(\theta) t \tag{1}$$

$$y = v_o \sin(\theta) - \frac{1}{2} g t^2 \tag{2}$$

Onde na eq. (1) considerou-se a posição inicial em x como zero, e na eq. (2) considerou-se a posição inicial em y como sendo zero, o que é uma consequência do referencial adotado e das condições iniciais do problema.

Isolando o tempo na eq. (1), tem-se:

$$t = \frac{x}{v_x} \tag{3}$$

Ainda, substituindo na eq. (2) a expressão para o tempo encontrada na eq. (3), encontra-se:

$$y = x \tan(\theta) - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2(\theta)} \tag{4}$$

Da figura, sabe-se que $y = 0$ quando $x = 0$ ou $x = L$. Com isso, considerando $x = L$, encontra-se o ângulo de lançamento em função das variáveis do problema. Confira:

$$\theta = \arctan\left(\frac{gL}{2v_x^2}\right) \tag{5}$$

Além disso, utiliza-se a eq. (4) para $x = 2L$, que é a distância horizontal entre a primeira fenda e o detector, e encontra-se $y = s$. Observe:

$$s = 2L\tan(\theta) - \frac{gL^2}{2v_x^2}$$

$$\therefore s = -\frac{gL^2}{v_x^2} \tag{6}$$

(b) Sabendo que s é inversamente proporcional a v_x^2, para mesmos g e L vale a proporção:

$$\frac{s_{Cs}}{s_K} = \frac{11}{5} = \frac{v_{x_K}^2}{v_{x_{Cs}}^2} \iff v_{x_K} = v_{x_{Cs}}\sqrt{\frac{11}{5}} \implies v_{x_K} > v_{x_{Cs}} \tag{7}$$

Onde Cs é o índice que faz referência ao átomo de Césio e K serve para o mesmo em relação ao Potássio. Portanto, da equação acima, verifica-se que o átomo de Potássio possui maior probabilidade de ter átomos ejetados com velocidade maior.

(c) O vetor velocidade total será a soma vetorial do vetor velocidade horizontal v_x com o vetor velocidade vertical v_y. Porém, v_x é constante para todo o tempo. Já $v_y = v_0\sin(\theta) - gt$, irá variar com o tempo por causa da aceleração da gravidade. Escrevendo a velocidade de forma vetorial, sabendo que $v_0\sin(\theta) = v_x\tan(\theta)$ e também que $t = \dfrac{x}{v_x}$, tem-se:

$$v = v_x\hat{i} + \left(v_x\tan(\theta) - \frac{gx}{v_x}\right)\hat{j} \tag{8}$$

Entretanto, deseja-se saber o vetor velocidade para quando o átomo atinge o detector, então, ainda utilizando o referencial adotado no início, e também o valor de θ calculado anteriormente, $x = 2L$ para esse contexto. Logo,

$$v = v_x\hat{i} - \left(\frac{3gL}{2v_x}\right)\hat{j} \tag{9}$$

É o vetor velocidade dos átomos ao atingirem o detector.

Questão 3

Um foguete sendo lançado desprende um de seus motores quando está entrando na troposfera terrestre, 35 km acima da superfície. Neste momento o foguete possui uma velocidade de 8 km/s formando um ângulo de 60° com relação à superfície.

(a) Considere que o foguete mantém essa mesma velocidade desde o seu lançamento, quando deixou a superfície. A que distância da base de lançamento, localizada na superfície terrestre, motor desprendido atinge o solo?

(b) Com qual velocidade o motor desprendido atinge o solo?

(c) Se continuar com uma velocidade constante, onde estará o foguete quando o motor desprendido atinge o solo?

Solução:

(a) Como não há aceleração no eixo horizontal, a velocidade horizontal inicial será constante durante todo o movimento. Portanto, para descobrir a que distância da base de lançamento cai o motor que foi desprendido, basta que seja calculado o tempo total de voo do motor e multiplique esse tempo pela velocidade horizontal do motor. Para tanto, divide-se o movimento em 2 etapas:

1. Subida

   Nesse trajeto, a velocidade do foguete é constante, segundo o enunciado. Logo, a velocidade vertical do motor será constante também durante todo esse percurso de subida, já que este está acoplado ao foguete. Reconhecendo que a velocidade vertical é o produto da velocidade total pelo seno do ângulo de inclinação da mesma em relação à horizontal, tem-se:

$$v_{0_y} = v_0 \sin(\theta) = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\ km/s$$

   Com isso, o tempo de subida é igual a razão entre a distância percorrida verticalmente e a velocidade de subida, calculada acima. Confira:

$$t_s = \frac{35}{4\sqrt{3}} \approx 5,0\ s$$

2. Descida

   Já durante a descida, analisando o movimento do motor isoladamente, percebe-se que ele possui velocidade vertical inicial idêntica à do foguete antes do desprendimento, isto é, $4\sqrt{3}$ km/s. Porém, como ele não pertence mais ao conjunto do foguete, será desacelerado pela gravidade, e a trajetória do mesmo será uma parábola característica de lançamento oblíquo.

Dessa forma, trata-se o movimento do motor como sendo um lançamento oblíquo de ângulo 60° com a horizontal, velocidade total inicial igual a 8 km/s, cujas componentes na vertical e horizontal valem, respectivamente, $4\sqrt{3}$ km/s e 4 km/s.

Para avaliar o momento da queda, consideramos um referencial em que a superfície terrestre está em $y = 0$, a posição vertical inicial do motor está em $y_0 = 35 \cdot 10^3$ m e a gravidade é negativa. Assim, segue que

$$y = y_0 + v_{0_y} t - \frac{1}{2} g t^2 \implies 0 = 35 \cdot 10^3 + 4\sqrt{3} \cdot 10^3 t - \frac{1}{2} 9,8 t^2$$

Cuja solução resulta em dois instantes de tempo — um representa o instante em que o foguete abandona o solo pela primeira vez, e o segundo representa o instante de tempo em que ele aterrissa. Com efeito, o instante que deseja-se é o segundo, isto é, $t_d \approx 1419$ s.

O tempo total de voo do motor é a soma do tempo de subida com o tempo de descida, isto é

$$T = t_s + t_d = 1424\ s$$

Dessa forma, a distância da base até o ponto em que o motor aterrissa em superfície terrestre é

$$D = v_{0_x} \cdot T = 4\ km/s\ \cdot 1424\ s \approx 6 \cdot 10^3\ km$$

(b) Como se sabe, a velocidade horizontal se mantém durante todo o percurso. Entretanto, para determinar a velocidade total do motor, precisa-se também da sua componente vertical, que pode ser calculada através de

$$v_y = v_{0_y} - g t_d = 4\sqrt{3} \cdot 10^3\ m\ - 9,8\ m/s^2\ \cdot 1419\ s\ \approx 7\ km/s$$

Logo, a velocidade com que o motor atinge o solo é

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4^3 + 7^2} \approx 8\ km/s$$

(c) Mantendo a sua velocidade constante, o foguete terá se deslocado um total de $v_x \cdot T$ na horizontal e $v_{0_y} \cdot T$ na vertical, isto é

$$\Delta x = 4 \cdot 1424 \approx 6 \cdot 10^3\ km$$
$$\Delta y = 4\sqrt{3} \cdot 1424 \approx 1 \cdot 10^4\ km$$

Questão 4

Considere que você é um pirata e está encarregado de efetuar disparos com o canhão de seu navio. Então você identifica um navio inimigo se aproximando. Seu comandante ordena disparos de aviso no mastro do navio inimigo. A posição e velocidade inicial da base do mastro do navio inimigo em relação oa uma ilha próxima, chamada "Ilha dos Peixes Grandes" são dadas respectivamente pelos vetores $\vec{s}_i = (s^x_{i_0}, s^y_{i_0}, s^z_{i_0})$ e $\vec{v}_i = (v^x_{i_0}, v^y_{i_0}, 0)$. A posição e velocidade inicial da boca de canhão, que você usará para disparar, em relação à "Ilha dos Peixes Grandes" são dadas respectivamente pelos vetores $\vec{s}_c = (s^x_{c_0}, s^y_{c_0}, s^z_{c_0})$ e $\vec{v}_c = (v^x_{c_0}, v^y_{c_0}, 0)$. Considerando que a bala possui uma massa m_b e sai da boca do canhão com uma velocidade de módulo v_{b_0} (em relação à própria boca do canhão). Considere a aceleração da gravidade $\vec{g} = (0, 0, -g)$, despreze a resistência do ar e responda as questões:

(a) Determine o vetor que determina a velocidade da base do mastro do navio inimigo em relação à boca do canhão que você usará para efetuar os disparos.

(b) Determine o vetor que determina a posição da base do mastro do navio inimigo em relação à boca do canhão que você usará para efetuar os disparos (em função do tempo).

(c) Determine o vetor na direção no qual você deve apontar o canhão no momento do disparo para atingir a base do mastro inimigo. Suponha que o disparo tenha sido efetuado no instante t_d. Suponha que $s^z_{i_0} - s^z_{c_0} = s^y_{i_0} - s^y_{c_0} = 0$ e $v^y_{i_0} - v^y_{c_0} = 0$.

Solução:

(a) O vetor velocidade da base do mastro do navio inimigo em relação à boca do canhão é exatamente o vetor velocidade relativa entre os mesmos. Ou seja, é o equivalente a colocar o referencial no canhão e avaliar qual é o vetor velocidade do mastro do navio inimigo nesse referencial. Por definição, tem-se

$$\vec{v}_{ci} = \vec{v}_i - \vec{v}_c = (v^x_{i_0} - v^x_{c_0}, v^y_{i_0} - v^y_{c_0}, 0) \tag{10}$$

onde $\vec{v}_{ci}$ indica a velocidade da base do mastro do navio inimigo em relação à boca do canhão.

(b) Analogamente ao item (a), dessa vez precisa-se encontrar a posição relativa. Por definição, escreve-se

$$\vec{r}_{ci} = \vec{r}_i - \vec{r}_c \tag{11}$$

Mas, $\vec{r}_i = \vec{s}_i + \vec{v}_i t$ e $\vec{r}_c = \vec{s}_c + \vec{v}_c t$, então

$$\vec{r}_{ci} = (\vec{s}_i + \vec{v}_i t) - (\vec{s}_c + \vec{v}_c t) = (\vec{s}_i - \vec{s}_c) + (\vec{v}_i - \vec{v}_c)t \tag{12}$$

onde $\vec{v}_i - \vec{v}_c$ foi calculado na eq. (10) e $(\vec{s}_i - \vec{s}_c)$ será calculado a seguir:

$$(\vec{s}_i - \vec{s}_c) = (s^x_{i_0}, s^y_{i_0}, s^z_{i_0}) - (s^x_{c_0}, s^y_{c_0}, s^z_{c_0}) = (s^x_{i_0} - s^x_{c_0}, s^y_{i_0} - s^y_{c_0}, s^z_{i_0} - s^z_{c_0}) \tag{13}$$

Portanto, o vetor que determina a posição da base do mastro do navio inimigo em relação à boca do canhão que é utilizado para efetuar os disparos (em função do tempo) é

$$\vec{r}_{ci} = (s^x_{i_0} - s^x_{c_0}, s^y_{i_0} - s^y_{c_0}, s^z_{i_0} - s^z_{c_0}) + (v^x_{i_0} - v^x_{c_0}, v^y_{i_0} - v^y_{c_0}, 0)t \tag{14}$$

(c) Sabendo que $s^z_{i_0} - s^z_{c_0} = s^y_{i_0} - s^y_{c_0} = 0$ e que $v^y_{i_0} - v^y_{c_0} = 0$, o movimento relativo da base do mastro inimigo em relação à boca do canhão se dará apenas no eixo x, com velocidade relativa $v^x_{i_0} - v^x_{c_0}$, e a distância que os separa inicialmente é simplesmente $s^x_{i_0} - s^x_{c_0}$.

Já que existe gravidade em z, para que o lançamento do projétil do canhão efetivamente aterrisse na base do mastro inimigo será necessário fazê-lo em direção oblíqua ao eixo x, com trajetória pertencente ao plano xOz no referencial relativo à boca do canhão discutido no último parágrafo.

O objetivo é que o tempo que leva para o projétil subir e descer vai implicar em um determinado deslocamento horizontal x_b em relação à boca do canhão, e a intenção é que a base do mastro inimigo esteja localizada na mesma posição x_b no instante de tempo em que o projétil aterrissa em coordenada $z = 0$.

Dito isso, escreve-se as equações do movimento do projétil nos dois eixos

$$z = tv_{0_b} \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 \tag{15}$$

$$x = tv_{0_b} \cos\theta \tag{16}$$

onde θ é o ângulo de inclinação da boca do canhão em relação ao eixo x, tal que o lançamento do projétil seja de tal forma a cair na base do mastro inimigo.

Nesse contexto, pode-se tomar $z = 0$ e para $t \neq 0$ encontra-se o instante de tempo em que o projétil aterrissa, isto é,

$$t = \frac{2v_{0_b} \sin\theta}{g} \tag{17}$$

Substituindo esse instante de tempo na equação para x, tem-se

$$A = \frac{v_{0_b}^2 \sin 2\theta}{g} \tag{18}$$

onde A é o alcance horizontal máximo do projétil ao aterrissar efetivamente.

Além disso, a posição da base do mastro inimigo em relação à boca do canhão é

$$r_{ci_x} = (s_{i_0}^x - s_{c_0}^x) + (v_{i_0}^x - v_{c_0}^x)t = \Delta x + t\Delta v$$

onde $\Delta x \equiv (s_{i_0}^x - s_{c_0}^x)$ e $\Delta v \equiv (v_{i_0}^x - v_{c_0}^x)$.

Em particular, deseja-se que $r_{ci_x} = A$ para $t = \dfrac{2v_{0_b} \sin\theta}{g}$, isto é

$$\frac{v_{0_b}^2 \sin 2\theta}{g} = \Delta x + \frac{2v_{0_b} \sin\theta}{g} \cdot \Delta v$$

$$\therefore v_{0_b}^2 \sin 2\theta - 2v_{0_b} \sin\theta \Delta v - g\Delta x = 0 \tag{19}$$

onde θ, o ângulo desejado, resolve esta equação, o que significa que θ está completamente determinado.

Questão 5

Considere que você esta parado em relação a superfície da terra. Calcule a velocidade linear que você possui devido a rotação da terra em torno de seu eixo (considere a terra como sendo uma esfera de raio 6.371 km). E devido a translação da terra em torno do sol (considere a orbita de translação como sendo um circulo de raio 150 milhões de km). Em cada um dos casos calcule a aceleração centrípeta. Compare com a aceleração da gravidade.

Solução: A velocidade linear de uma pessoa localizada na superfície terrestre é dada pela distância percorrida dividido pelo intervalo de tempo. Pode-se considerar, por exemplo, a passagem de um dia inteiro (24 horas) e, considerando a Terra como uma esfera, a distância percorrida terá sido $2\pi r$. Calculando, tem-se

$$v = \frac{2\pi r}{\Delta t} = \frac{2\pi(6371 \cdot 10^3)}{24 \cdot 3600} \approx 463 m/s$$

Além disso, a aceleração centrípeta pode ser dada por

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{463^2}{6371 \cdot 10^3} = 3,36 \cdot 10^{-2}\ m/s^2$$

Já em relação ao movimento da Terra em torno do Sol (que dura aproximadamente 365 dias), tem-se

$$v' = \frac{2\pi R}{\Delta t'} = \frac{2\pi(150 \cdot 10^6 \cdot 10^3)}{365 \cdot 24 \cdot 3600} \approx 3 \cdot 10^4 \ m/s$$

Enquanto que a aceleração centrípeta para esse movimento é encontrada através de

$$a'_{cp} = \frac{(v')^2}{R} = \frac{(3 \cdot 10^4)^2}{150 \cdot 10^9} = 6 \cdot 10^{-3} \ m/s^2$$

Percebe-se que a aceleração da gravidade é 3 ordens de grandeza maior do que a aceleração centrípeta para o movimento de uma pessoa durante a rotação da Terra em torno do seu próprio eixo, enquanto que é 4 ordens de grandeza maior do que a aceleração centrípeta para o movimento de uma pessoa durante a translação da Terra em torno do Sol.

Questão 6

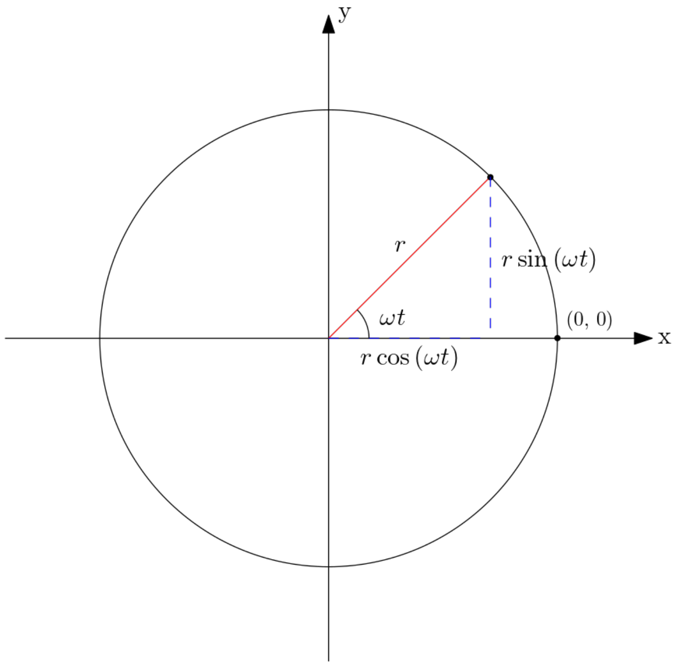
O ponteiro de um cronômetro tem 2.5 cm de comprimento e completa uma volta em 10 segundos.

(a) Qual o vetor deslocamento da ponta do ponteiro entre as marcações de 5 e 7 segundos? Defina um referencial apropriado.

(b) Qual a velocidade e aceleração da ponta do ponteiro quando ele passa pela marcação de 4 segundos? Forneça a resposta tanto em vetores quanto em módulo. Faça um esquema representando esses vetores.

Solução:

(a) O esquema abaixo foi desenhado de forma a estabelecer sem ambiguidade o referencial adotado, e o sistema de coordenadas será o cartesiano. Confira:



onde $r = 2.5\ cm$ e $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}\ s^{-1}$.

Note que com essa descrição, pode-se dizer que

$$x = r\cos(\omega t) \tag{20}$$

$$y = r\sin(\omega t) \tag{21}$$

E isso nos permite escrever o vetor posição para qualquer instante de tempo, isto é

$$\vec{r} = \left(r\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\hat{i} + \left(r\sin\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\hat{j} \tag{22}$$

Já que deseja-se saber o vetor deslocamento da ponta do ponteiro entre as marcações de 5 e 7 segundos, substituí-se $t = 5\ s$ e $t = 7\ s$ na equação para o vetor posição e calcula-se a diferença.

$$\vec{r}(5) = (r\cos(\pi))\,\hat{i} + (r\sin(\pi))\,\hat{j} = (-r)\hat{i}$$

$$\vec{r}(7) = \left(r\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right)\hat{i} + \left(r\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right)\hat{j} = (-0,31r)\hat{i} - (0,95r)\hat{j}$$

Portanto, o vetor deslocamento é dado por (substituindo $r = 0,025\ m$):

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(7) - \vec{r}(5) \approx (2\cdot 10^{-2})\hat{i} - (2\cdot 10^{-2})\hat{j}$$

(b) Sabendo que $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ e que $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, encontra-se o vetor velocidade e o vetor aceleração para qualquer instante de tempo a seguir:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left(r\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\hat{i} + \left(r\sin\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\hat{j}\right)$$

$$\therefore \vec{v} = \left(-\frac{r\pi}{5}\sin\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\hat{i} + \left(\frac{r\pi}{5}\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\hat{j} \tag{23}$$

Também,

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left(-\frac{r\pi}{5}\sin\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\hat{i} + \left(\frac{r\pi}{5}\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\hat{j}\right)$$

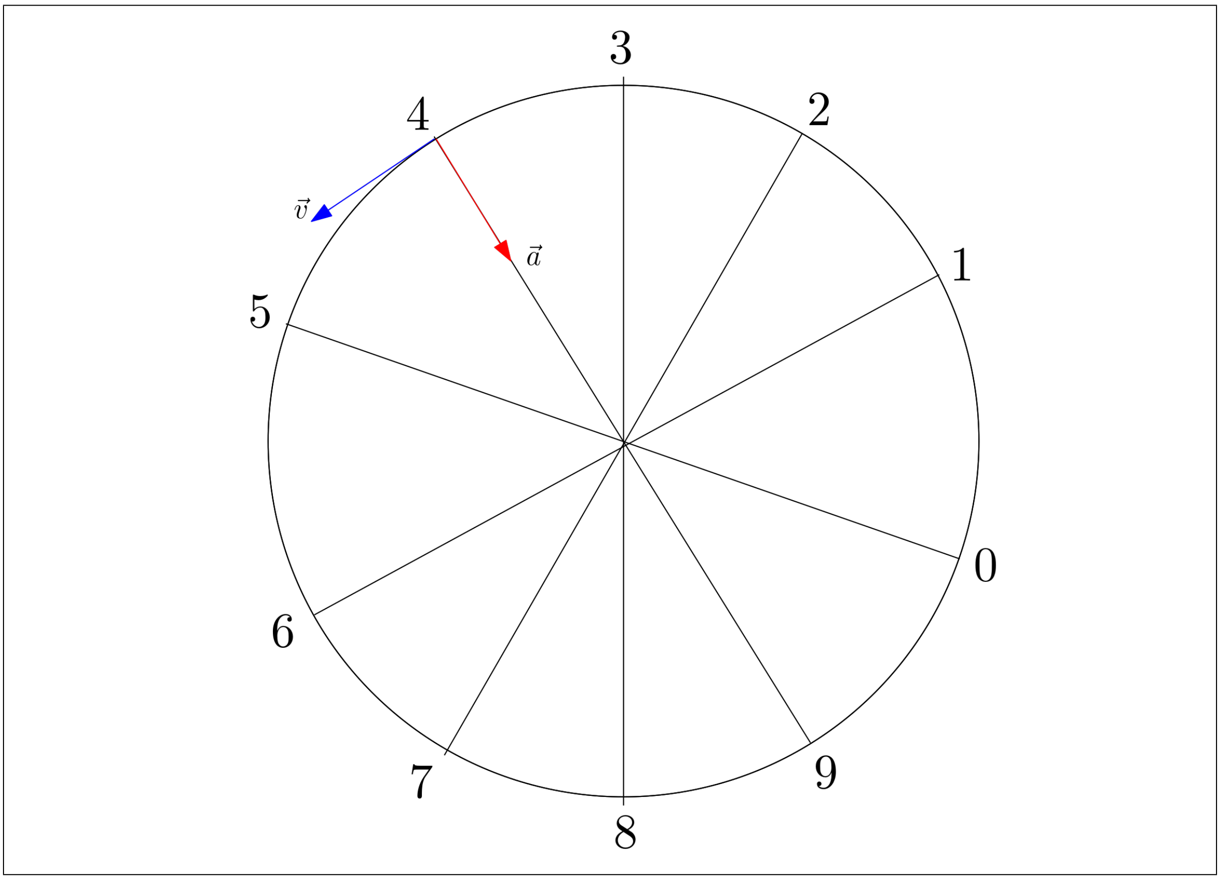
$$\therefore \vec{a} = \left(-\frac{r\pi^2}{25}\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\hat{i} - \left(\frac{r\pi^2}{25}\sin\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\hat{j} \tag{24}$$

Para $t = 4\ s$ e $r = 0,025\ m$, tem-se

$$\vec{v} \approx (-1\cdot 10^{-2})\hat{i} - (1\cdot 10^{-2})\hat{j} \implies |\vec{v}| \approx 1\cdot 10^{-2}\ m/s \tag{25}$$

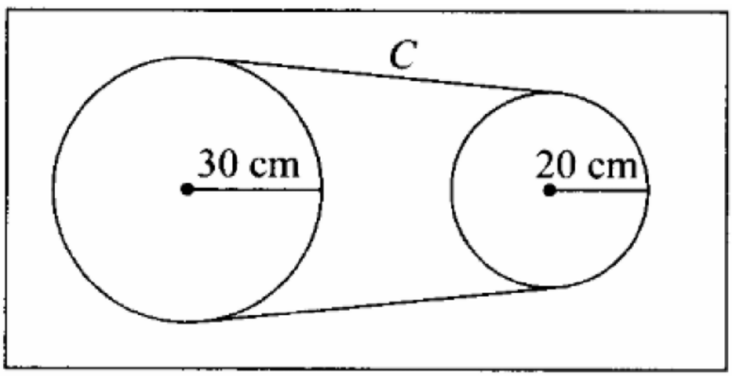
$$\vec{a} \approx (8\cdot 10^{-3})\hat{i} - (6\cdot 10^{-3})\hat{j} \implies |\vec{a}| \approx 1\cdot 10^{-2}\ m/s^2 \tag{26}$$

Um esquema da representação dos vetores no relógio é disponibilizado a seguir:



Questão 7

Considere a figura abaixo. Onde a roda maior esta ligada à uma roda menor por uma correia que toca cada uma das rodas sem deslizamento. A roda maior parte do repouso e possui uma aceleração angular dada pela função $a(t) = a_0$.



(a) Quais são as unidades de a_0 em S.I.

(b) Qual a velocidade linear de um ponto da roda maior em relação ao seu eixo de rotação após 3 segundos de aceleração? E angular?

(c) Qual a velocidade linear da roda menor após 3 segundos? E angular?

(d) Quantas voltas a roda menor dará até a roda maior dar uma volta completa?

Solução:

(a) De $a(t) = a_0$ é imediato que $[a_0] = T^{-2}$, uma vez que para a equação estar dimensionalmente correta a_0 deve ter as mesmas dimensões de $a(t)$, que é a aceleração angular e cuja dimensão é T^{-2} por definição.

(b) Em primeiro lugar, calcula-se a velocidade angular a partir da aceleração angular. Confira:

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \implies \int a(t)\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}\omega \therefore \omega = \omega_0 + a_0 t$$

Porém, como o sistema parte do repouso, tem-se que

$$\omega = a_0 t \implies \omega(3) = 3a_0\ s^{-1} \tag{27}$$

Também, sabe-se que $S = R\theta \implies v = R\omega$. A partir daqui, substituí-se $t = 3\ s$ e utiliza-se para ω a expressão calculada acima. Observe:

$$v = R\omega = \left(\frac{3}{10}\right) \cdot (a_0 \cdot 3) = \frac{9a_0}{10}\ m/s \tag{28}$$

(c) Como a roda maior está ligada à menor por uma correia que não desliza, o movimento é transmitido de forma que a velocidade linear é igual para ambas as rodas. Assim, $v'(3) = v(3) = \dfrac{9a_0}{10}\ m/s$, onde $v'(3)$ é a velocidade linear da roda menor.

Além disso, sendo a velocidade linear igual para ambas as rodas, tem-se

$$\omega \cdot r_1 = \omega' \cdot r_2$$

onde r_1 é o raio da roda maior, r_2 é o raio da roda menor, e ω' é a velocidade angular da roda menor. Utilizando essa relação, encontra-se

$$\omega'(3) = \omega(3) \cdot \frac{3}{2} = \frac{9a_0}{2}\ s^{-1} \tag{29}$$

(d) Sabendo que para um instante de tempo t qualquer tem-se $\omega' = \dfrac{3\omega}{2}$, concluí-se que $\omega' = \dfrac{3a_0 t}{2} \implies \theta' = \dfrac{3a_0 t^2}{4}$ através de integração.

O tempo que demora para a roda maior dar uma volta completa é obtido através de $\omega = a_0 t \implies \theta = \frac{a_0 t^2}{2}$ para $\theta = 2\pi$ e isolando t, isto é

$$T = \sqrt{\frac{4\pi}{a_0}} \tag{30}$$

Utilizando $t = T$ na equação para θ', tem-se

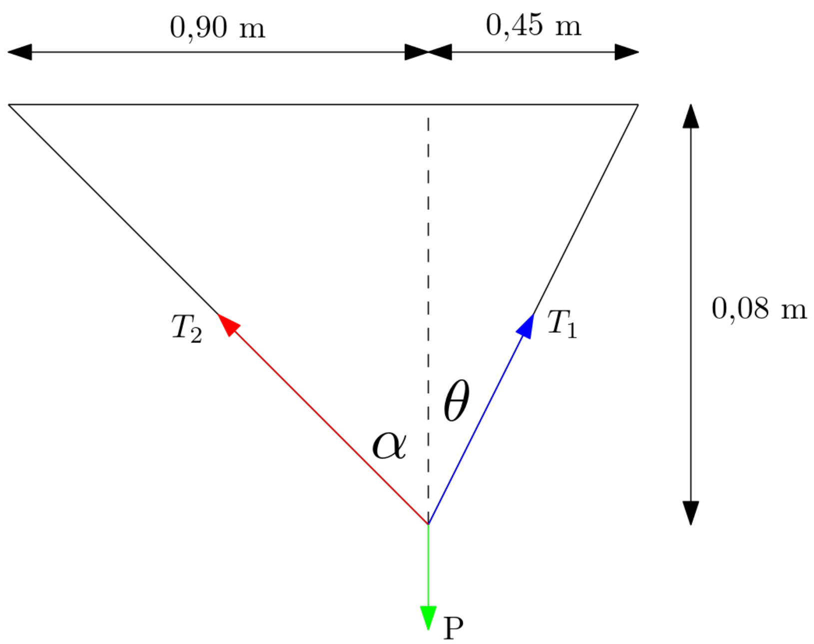
$$\theta' = 3\pi \tag{31}$$

O que significa que a roda menor dá 1 volta e meia quando a roda maior dá uma volta completa.

Questão 8

Uma peça de roupa é estendida num varal cujo a corda possui 1.35 m de comprimento e inicialmente está totalmente esticada. A roupa é presa por um prendedor num ponto que está localizado a 2/3 de uma das extremidades da corda e com o peso da roupa este ponto do varal desloca-se 8 cm para baixo. A roupa molhada possui uma massa de 300 g. Determine os vetores tração da corda do varal para manter a peça de roupa estendida em equilíbrio.

Solução: Disponibilizo o seguinte diagrama para auxiliar no desenvolvimento da solução do problema:



Decompondo T_1 e T_2 na horizontal e vertical utilizando os ângulos α e θ, tem-se o seguinte sistema para manter a peça de roupa estendida em equilíbrio:

$$T_2 \sin(\alpha) = T_1 \sin(\theta)$$
$$T_2 \cos(\alpha) + T_1 \cos(\theta) = P$$

Considero que o comprimento do varal é $L = 1,35\,m$ e que o deslocamento vertical da roupa foi de $h = 0,08\,m$.

A hipotenusa cuja direção coincide com a direção de T_1 e a hipotenusa cuja direção coincide com a direção de T_2 podem ser calculadas através do teorema de pitágoras, o que possibilita determinar o seno e o cosseno dos ângulos α e θ. Com efeito, definindo $\gamma \equiv \frac{3h}{L}$, tem-se

$$\sin\alpha = \frac{2L}{3\sqrt{\frac{4L^2}{9} + h^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{\gamma}{2}(\sin\alpha)$$

$$\sin\theta = \frac{L}{3\sqrt{\frac{L^2}{9} + h^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}$$

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \gamma(\sin\theta)$$

O que permite reescrever o sistema encontrado para T_1, T_2 e P da seguinte maneira:

$$T_2 \sin(\alpha) = T_1 \sin(\theta)$$
$$T_2 \cdot \frac{\gamma}{2}(\sin\alpha) + T_1 \cdot \gamma(\sin\theta) = P$$

$$\implies T_1 \sin\theta \left(\frac{3\gamma}{2}\right) = P \therefore T_1 = \frac{2mg}{3\cos\theta} \approx 1 \cdot 10^1\ N$$

$$\implies T_2 = T_1 \cdot \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} = T_1 \cdot \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}{1+\gamma^2}} \approx 1 \cdot 10^1\ N$$

Reiterando que $\gamma = \frac{3h}{L}$ e $\cos\theta = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}$. Sabe-se, também, que $m = 0,3\,kg$, $g = 9,81\,m/s^2$, $h = 0,08\,m$ e $L = 1,35\,m$.

Portanto, tem-se T_1 e T_2 em função de todos os valores dados no enunciado e a solução está finalizada.

Questão 9

Uma partícula se movimenta descrevendo uma espiral no sentido anti-horário. Sua trajetória é dada por $r = A\theta$, onde $A = (1/\pi)$ m/rad é constante. O ângulo θ aumenta com o tempo seguindo a equação $\theta = \dfrac{\alpha t^2}{2}$, onde α é constante.

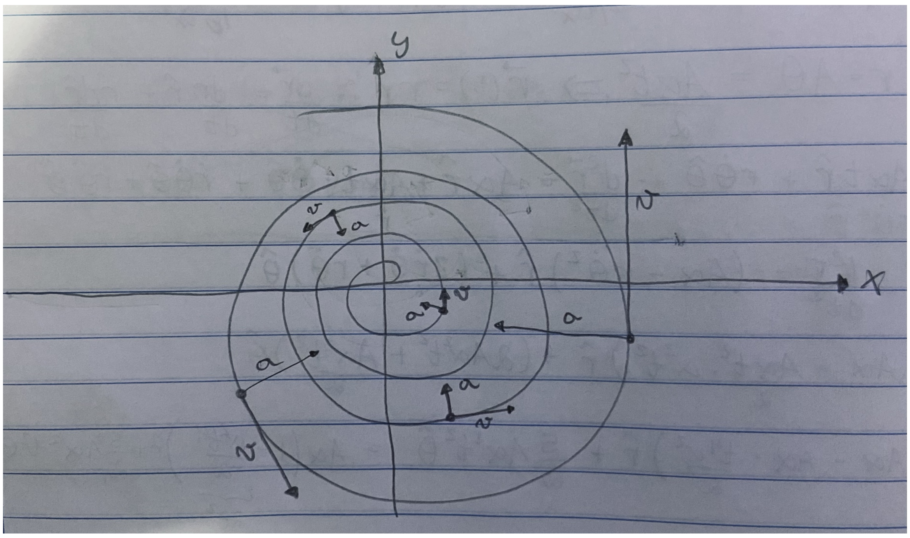
(a) Desenhe a trajetória, assim como os vetores velocidade e aceleração em vários pontos da trajetória.

(b) Mostre que a aceleração radial é zero quando $\theta = 1/\sqrt{2}$ rad.

(c) Para que ângulos as componentes radial e tangencial da aceleração têm a mesma magnitude?

Solução:

(a) A seguir disponibilizo o desenho da trajetória feito à mão com os vetores velocidade e aceleração em vários pontos da trajetória.



Convém notar que o comprimento dos vetores vai aumentando com o tempo, o que é de se esperar por causa das informações mencionadas a respeito de r e θ no enunciado.

(b) Partindo de $r = A\theta = \dfrac{A\alpha t^2}{2}$ tem-se que

$$\vec{r}(t) = r\hat{r} = \frac{A\alpha t^2}{2}\hat{r}$$

$$\implies \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} = (A\alpha t)\hat{r} + \left(r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\hat{\theta} = (A\alpha t)\hat{r} + \left(\frac{A\alpha^2 t^3}{2}\right)\hat{\theta}$$

$$\implies \vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}(A\alpha t)}{\mathrm{d}t}\hat{r} + (A\alpha t)\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(A\alpha^2 t^3)}{\mathrm{d}t}\hat{\theta} + \left(\frac{A\alpha^2 t^3}{2}\right)\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \left(A\alpha - \frac{(A\alpha^3 t^4)}{2}\right)\hat{r} + \left(A\alpha^2 t^2 + \frac{3}{2}A\alpha^2 t^2\right)\hat{\theta}$$

A partir daqui note que a componente radial da aceleração é

$$\left(A\alpha - \frac{(A\alpha^3 t^4)}{2}\right)$$

E também que t^4 pode ser obtido através de $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 \implies t^4 = \frac{4\theta^2}{\alpha^2}$. Com isso, a componente radial da aceleração torna-se

$$\left(A\alpha - 2A\alpha\theta^2\right)$$

Quando faz-se $\theta = 1/\sqrt{2}$ resta

$$A\alpha - A\alpha = 0 \quad Q.E.D.$$

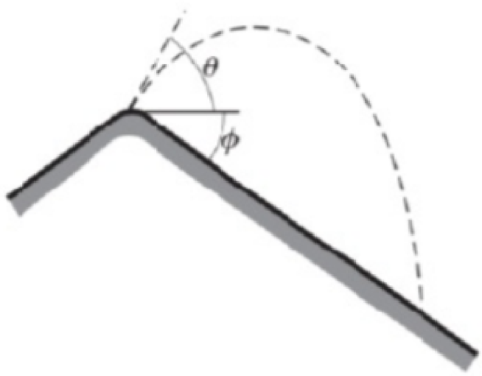
(c) Igualando as componentes radial e tangencial da aceleração, tem-se

$$\left(A\alpha - 2A\alpha\theta^2\right) = 5A\alpha\theta \implies 2\theta^2 + 5\theta - 1 = 0$$

$$\theta = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4} \implies \theta \approx -154^\circ \text{ ou } 10^\circ$$

Questão 10

Uma pedra está no topo de uma montanha que tem uma inclinação descendente de ângulo ϕ como mostrado na figura. A que ângulo θ com a horizontal a pedra tem que ser lançada para que o alcance seja máximo?



Solução:

Seja $\theta + \phi = \beta$, e v_0 a velocidade inicial da pedra. As equações para o movimento da pedra em y e em x, adotando um referencial cujo y é perpendicular à montanha, x é solidário à mesma e cuja origem está no topo, são escritas a seguir:

$$y = tv_0 \sin\beta - \frac{g\cos\phi}{2}t^2$$
$$x = tv_0 \cos\beta + \frac{g\sin\phi}{2}t^2$$

Para o instante de tempo em que a pedra aterrissa na montanha, considera-se $y = 0$ e $t \neq 0$, o que permite determinar o tempo na equação para y acima. Confira:

$$0 = tv_0 \sin\beta - \frac{g\cos\phi}{2}t^2 \implies t = \frac{2v_0\sin\beta}{g\cos\phi}$$

Substituindo esse instante de tempo na equação para y, tem-se

$$x = \left(\frac{2v_0\sin\beta}{g\cos\phi}\right) v_o \cos\beta + \frac{g\sin\phi}{2}\left(\frac{2v_0\sin\beta}{g\cos\phi}\right)^2$$

$$\implies x = \frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g\cos\phi} + \frac{2v_0^2\sin^2\beta\sin\phi}{g\cos^2\phi}$$

Como ϕ é fixo a priori, para que obtenha-se o alcance máximo é necessário que $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\beta} = 0$. Logo,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\beta} = 2cos2\beta + 2\sin 2\beta\tan\phi = 0 \implies \tan 2\beta \cdot \tan\phi = -1$$

Da trigonometria, sabe-se que $\tan 2\beta \cdot \tan\phi = -1 \iff 2\beta - \phi = \dfrac{\pi}{2}$. Portanto,

$$\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$$

Como $\theta + \phi = \beta$, então

$$\theta + \phi = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$$

Portanto, o ângulo θ que maximiza o alcance é $\theta = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\phi}{2}$.

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Física I - 4302111

Profa. Dra. Valentina Martelli

Lista de Problemas III

Victor Hugo dos Santos Lins

Email: victorlins@usp.br

3 de Junho de 2021

Questão 1

Uma bolinha de massa m e velocidade v está pendurada por um fio de comprimento l realizando uma trajetória circular no plano horizontal, como mostrado na Figura 1. Considerando que a bolinha possui massa m:

(a) Ilustre todas as forças atuando no sistema.

(b) Descreva a tensão no fio.

(c) Descreva a relação entre a velocidade da bolinha e o ângulo θ.

(d) Encontre o período da oscilação.

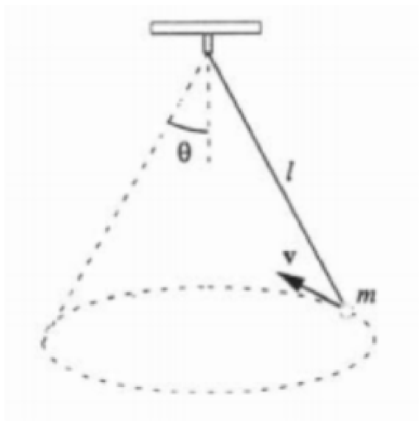
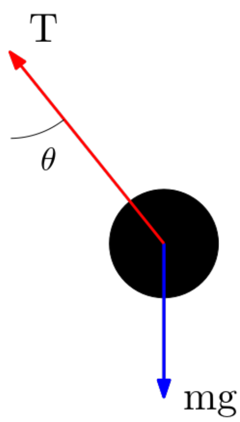


Figura 1: Figura da questão n. 1.

Solução:

(a) Observe a ilustração produzida abaixo para responder o item.



onde mg é o peso da bolinha e T é a tração que atua ao longo do fio de comprimento l. Portanto, todas as forças atuando no sistema estão explicitadas.

(b) Através da ilustração do item (a), percebe-se que $T\cos\theta = mg$ já que não há movimento na vertical. Portanto, o módulo de T fica determinado por $T = \dfrac{mg}{\cos\theta}$ e a direção de T é ao longo do fio, isto é, fazendo um ângulo de θ com a vertical em sentido anti-horário. O sentido de T é tal que essa força fica ao longo do fio, então tem-se toda a descrição da tensão uma vez que possuímos seu módulo, direção e sentido.

(c) Ainda com a ilustração do item (a), pode-se perceber que através da decomposição vetorial de T é possível escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} T\cos\theta = & mg \\ T\sin\theta = & \dfrac{mv^2}{r} \end{cases}$$

uma vez que na vertical não há movimento e na horizontal a componente da tração funcionará como resultante centrípeta do movimento circular.

Sabe-se também que $r = l\sin\theta$, pela trigonometria da Figura 1. Dividindo a segunda equação pela primeira equação, temos

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \therefore v^2 = lg\tan\theta\sin\theta \implies v = \sin\theta\sqrt{\frac{lg}{\cos\theta}}$$

(d) Sabe-se que $v = \omega \cdot r$ e que $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Então, segue que

$$v = \frac{2\pi r}{T} \therefore T = \frac{2\pi l\sin\theta}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$$

Questão 2

Considere um conjunto de blocos A, B e C tal que, o bloco B está em repouso sob o bloco A, o qual está ligado ao bloco C por meio de um fio de massa desprezível, como ilustrado na Figura 2. Se o atrito entre os blocos A e B for dado por μ_e e o atrito entre a mesa e o bloco A for dado por μ_c, responda:

(a) Qual é a relação entre as massas (m_A, m_B, m_C) para que o sistema fique em equilíbrio?

(b) Qual é o valor máximo da massa do bloco C para que os blocos A e B deslizem juntos?

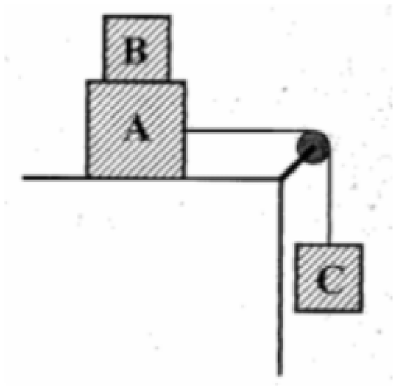
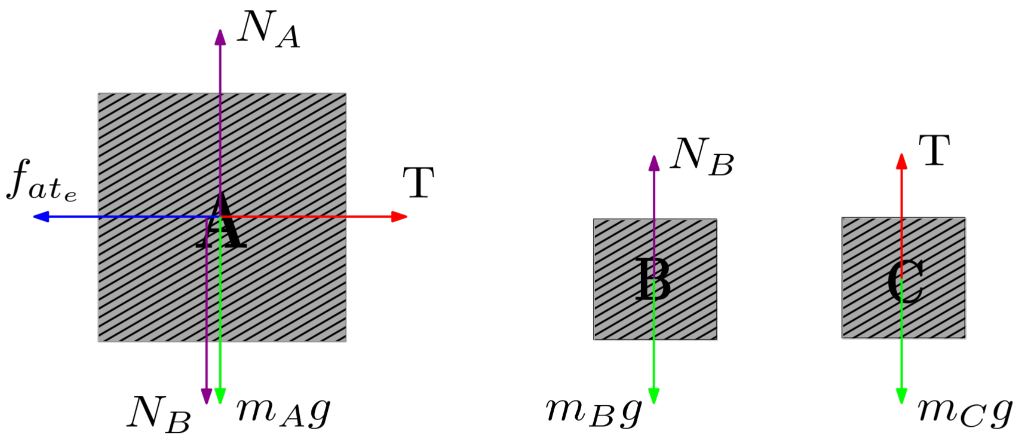


Figura 2: Figura da questão n. 2.

Solução:

(a) Na condição de equilíbrio, temos como diagrama de forças para cada um dos blocos a seguir:



Analisando o diagrama de forças, é imediato que

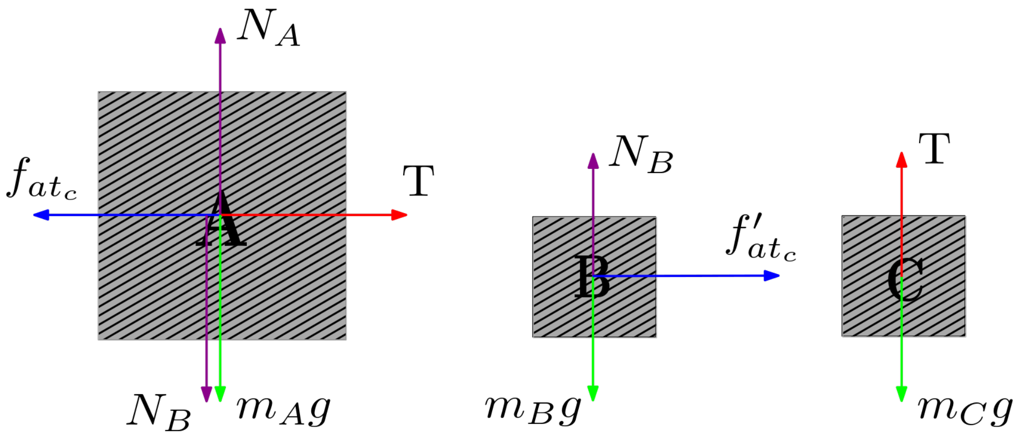
$$N_A = m_A g + N_B, \quad f_{at_e} = T, \quad T = m_C g$$

onde $f_{at_e} = \mu_c \cdot N_A$ (com μ_c sendo o coeficiente de atrito estático) é o atrito estático máximo que segura o bloco A de deslizar. Segue que

$$m_C \cancel{g} = \mu_c \cdot (m_A \cancel{g} + m_B \cancel{g})$$
$$\implies \mu_c = \frac{m_C}{m_A + m_B}$$

é a relação entre as massas para que o sistema fique em equilíbrio.

(b) Para que os blocos A e B deslizem juntos, é preciso que eles possuam uma mesma aceleração, que chamaremos de a_{max}. Nesse novo contexto, existe uma força acelerando o corpo B (que é a força de atrito cinético entre B e A). Portanto, ajustando o diagrama de forças dos corpos:



onde f_{at_c} é a força de atrito cinético entre o bloco A e a mesa e f'_{at_c} é a força de atrito cinético entre o bloco B e o bloco A. Do diagrama de forças, segue que

$$f'_{at_c} = \mu_e \cdot (m_B g), \quad f_{at_c} = \mu_c \cdot (m_A + m_B)g, \quad T - f_{at_c} = m_A a_{max}$$
$$f'_{at_c} = m_B a_{max}, \quad m_C g - T = m_C a_{max}$$

onde μ_e aqui é considerado o coeficiente de atrito cinético entre o bloco B e o bloco A, mu_c é o coeficiente de atrito cinético entre o bloco A e a mesa, e é utilizado os valores máximos das respectivas forças de atrito uma vez que deseja-se saber *o valor máximo da massa do bloco C para que os blocos A e B deslizem juntos.*

Das equações encontradas, somando-se $T - f_{at_c} = m_A a_{max}$ com $m_C g - T = m_C a_{max}$, temos

$$m_C g - f_{at_c} = (m_A + m_C) a_{max}$$

Mas, $f'_{at_c} = m_B a_{max}$, então

$$m_C g - f_{at_c} = (m_A + m_C) \cdot \frac{f'_{at_c}}{m_B}$$

como $f'_{at_c} = \mu_e \cdot (m_B g)$ e $f_{at_c} = \mu_c \cdot (m_A + m_B) g$, segue que

$$m_C \cancel{g} - \mu_c \cdot (m_A + m_B)\cancel{g} = (m_A + m_C) \cdot \frac{\mu_e \cdot (\cancel{m_B}\cancel{g})}{\cancel{m_B}}$$

rearranjando a equação, temos

$$m_C = \frac{\mu_e(m_A) + \mu_c(m_A + m_B)}{1 - \mu_e}$$

Questão 3

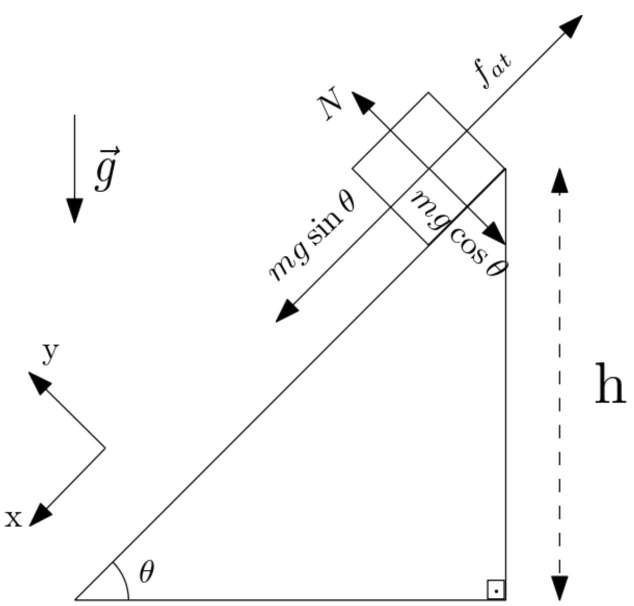
Considerando um bloco de massa m no topo de um plano inclinado com um ângulo θ em relação ao plano da superfície e uma altura máxima h:

(a) Prove que a velocidade final é independente do ângulo θ para o caso sem atrito. Considere que o bloco possui uma velocidade inicial v_0.

(b) Encontre quanto tempo o bloco gastará para percorrer todo o plano se o atrito cinético μ_c entre o bloco e a rampa for $\mu_c < \tan\theta$.

(c) Ainda considerando $\mu_c < \tan\theta$, encontre a velocidade final do bloco.

Solução: Observe uma ilustração do sistema em uma situação com a presença do atrito, para auxiliar na resolução:



(a) Nesse primeiro caso, como não há atrito, a aceleração do corpo será dada pela própria decomposição da gravidade na direção x destacada na figura, isto é

$$a_x = g\sin\theta$$

Além disso, a hipotenusa L do triângulo pode ser determinada em função de h e θ através de

$$\sin\theta = \frac{h}{L} \implies L = \frac{h}{\sin\theta}$$

Sendo a velocidade inicial do corpo v_0, a sua velocidade final é dada pela equação de Torricelli:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$$

Nesse caso, $a = a_x = g\sin\theta$ e $\Delta s = L = \dfrac{h}{\sin\theta}$. Realizando as devidas substituições, temos

$$v^2 = v_0^2 + 2g\cancel{\sin\theta}\frac{h}{\cancel{\sin\theta}} \iff v^2 = v_0^2 + 2gh$$

Logo, a velocidade final *não depende do ângulo* θ para o caso sem atrito.

(b) Já no caso com atrito, assumindo que $\mu_c < \tan\theta$ tem-se da ilustração disponibilizada que

$$N = mg\cos\theta, \quad mg\sin\theta - f_{at} = ma$$

como $f_{at} = \mu_c \cdot N$, então

$$mg\sin\theta - \mu_c mg\cos\theta = ma \iff a = g(\sin\theta - \mu_c\cos\theta)$$

Como $\mu_c < \tan\theta$, tem-se que $a > 0$ e o resultado é conforme o esperado.

O tempo que decorre para o bloco percorrer todo a distância $L = \dfrac{h}{\sin\theta}$ pelo plano inclinado é dado pela raiz positiva t^+ da equação horária das posições:

$$L = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \iff t^+ = \sqrt{\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 + \frac{2L}{a}} - \frac{v_0}{a}$$

onde $a = g(\sin\theta - \mu_c\cos\theta)$ e $L = \dfrac{h}{\sin\theta}$ foram determinados anteriormente. Portanto, tem-se o tempo que o bloco gasta para percorrer todo o plano em função das variáveis do problema:

$$t^+ = \sqrt{\left(\frac{v_0}{g(\sin\theta - \mu_c\cos\theta)}\right)^2 + \frac{2h}{g\sin\theta(\sin\theta - \mu_c\cos\theta)}} - \frac{v_0}{g(\sin\theta - \mu_c\cos\theta)}$$

(c) Mais uma vez, a velocidade final pode ser dada pela equação de Torricelli, porém dessa vez usa-se o novo valor da aceleração (para o caso com atrito), confira:

$$v^2 = v_0^2 + 2aL = v_0^2 + 2g(\sin\theta - \mu_c\cos\theta)\frac{h}{\sin\theta}$$

$$\iff v = \sqrt{v_0^2 + 2gh(1 - \mu_c\cot\theta)}$$

Obs.: note que se $\mu_c = 0$ a igualdade é coerente com o resultado obtido no item (a).

Questão 4

Um martelo atinge um prego com velocidade v, fazendo-o enterrar-se de uma profundidade l numa prancha de madeira.

(a) Mostre que a razão entre a força média exercida sobre o prego e o peso do martelo é igual a h/l onde h é a altura de queda livre do martelo que o faria chegar ao solo com velocidade v.

(b) Estime a ordem de grandeza dessa razão para valores típicos de h e l.

Solução:

(a) Considera-se que o martelo parte de uma altura $y_0 = 0$ em queda livre e se desloca até a prancha de madeira, tomando a prancha como $y = h$. Através da equação de Torricelli, temos

$$v^2 = v_0^2 + 2g\Delta y$$

Onde g foi dado como positivo por conta do referencial adotado no parágrafo anterior. Assim, como o martelo parte do repouso, segue

$$v = \sqrt{2gh}$$

É a velocidade com que o martelo atinge o prego, o que implica que o prego começa a enterrar-se na prancha de madeira com essa mesma velocidade que o martelo acaba de imprimir.

Dessa forma, sabendo que o prego "afunda" até o repouso, assumindo uma *desaceleração* constante do prego durante o trajeto, mais uma vez, por Torricelli, pode-se dizer que

$$0 = v^2 - 2al \implies mv^2 = 2l \cdot ma = 2l \cdot F_m$$

onde F_m foi a força média empregada. Usando o v calculado anteriormente nesta nova equação, temos

$$2mgh = 2l \cdot F_m \implies F_m = P \cdot \frac{h}{l} \therefore \frac{F_m}{P} = \frac{h}{l}$$

onde utilizou-se do fato que $P = mg$.

(b) Supondo que o martelo cai de uma altura $h \approx 50cm$ e o prego afunda $l \approx 5cm$, a razão pode ser estimada para $h/l = 50/5 = 10 \implies O.G. = 10^1$.

Questão 5

O sistema da Figura 3 está em equilíbrio. A distância d é de 1 m e o comprimento de cada uma das molas é de 0,5 m. A massa m de 1 kg faz descer o ponto P de uma distância $h = 15cm$. A massa das molas é desprezível. Calcule a constante k das molas.

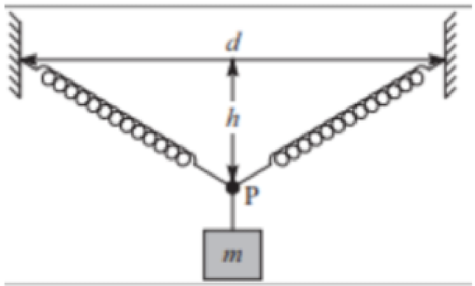


Figura 3: Figura da questão n. 5.

Solução: Uma vez que as molas são idênticas, de comprimento natural $l = 0,5m$ e a distância d é de 1 m, na Figura 3 tem-se dois triângulos retângulos de catetos h e $d/2$, cuja hipotenusa é igual à deformação sofrida pelas molas somada ao seu comprimento natural. Equacionando:

$$(\Delta x + 0,5)^2 = h^2 + (d/2)^2 \implies \Delta x = \sqrt{h^2 + (d/2)^2} - 0,5$$

O que, para $h = 0,15m$ e $d = 1m$ conforme mencionado no enunciado, implica que $\Delta x \approx 0,022m$.

Chamando de θ o ângulo que as molas fazem com a vertical (que coincide com h), decompõe-se a força elástica das molas na horizontal e vertical.

Da figura, pode-se perceber que a componente horizontal de cada mola possuem mesmo módulo (pois as molas são idênticas e igualmente deformadas) porém sentido oposto, ocasionando no cancelamento.

Por outro lado, as componentes verticais se somam para equilibrar o peso do bloco de massa m. A decomposição na componente vertical da força elástica utilizando o ângulo θ supracitado, então, é tal que

$$2 \cdot F_{el} \cdot \cos\theta = mg$$

onde o fator 2 surge uma vez que é preciso levar em conta a influência das duas molas. Pela lei de Hooke, se sabe que $F_{el} = k \cdot \Delta x$, enquanto que pela trigonometria da Figura 3 se sabe que $\cos\theta = \frac{h}{(\Delta x + 0,5)}$, isto é, cateto adjacente dividido pela hipotenusa.

A equação simplifica para:

$$2 \cdot (k \cdot \Delta x) \cdot \frac{h}{\Delta x + 0,5} = mg \implies k = \frac{mg(\Delta x + 0,5)}{2h\Delta x}$$

O que para $\Delta x \approx 0,022m$ calculado anteriormente, $m = 1kg$, $g = 9,81m/s^2$ e $h = 1m$, é equivalente a

$$k \approx 775N/m$$

Questão 6

A figura mostra, em função do tempo, a componente F_x da força que age sobre um bloco de gelo de 3,0 kg que pode se deslocar apenas no eixo x. Em t = 0, o bloco está se movendo no sentido positivo do eixo, com uma velocidade de módulo 3,0 m/s. Quais são:

(a) o módulo da velocidade do bloco no instante $t = 11s$?

(b) o sentido do movimento do bloco no instante $t = 11s$?

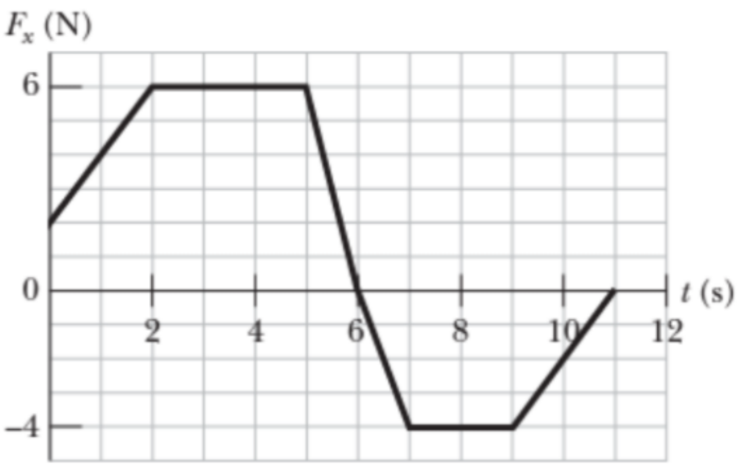


Figura 4: Figura da questão n. 6

Solução:

(a) Se sabe que a área abaixo do gráfico $F \times t$ é equivalente ao impulso, que por sua vez é igual à variação da quantidade de movimento pelo teorema do impulso e quantidade de movimento.

Dessa forma, calcula-se a área entre $t = 0s$ e $t = 6s$ (que é positiva porque F_x é positiva nesse intervalo, segundo o gráfico) e teremos a variação de quantidade de movimento positiva. Logo após isso, calcula-se a área entre $t = 6s$ e $t = 11s$, o que resultará na segunda variação de quantidade de movimento, dessa vez negativa. Soma-se as duas variações e iguala-se a $m\Delta v$, que é Δp por definição para $m = constante$, a fim de descobrir a velocidade final.

Confira:

$$A_1 = \frac{(2+6)\cdot 2}{2} + \frac{(3+4)\cdot 6}{2} = 29$$
$$A_2 = \frac{(5+2)\cdot(-4)}{2} = -14$$
$$\therefore \Delta p = 15\ N \cdot s$$

onde as áreas foram calculadas dividindo o gráfico da Figura 4 em trapézios menores e usando a área para os respectivos trapézios entre $t = 0s$ e $t = 2s$, $t = 2s$ e $t = 6s$, e $t = 6s$ e $t = 11s$.

Assim, o módulo da velocidade do bloco no instante em $t = 11s$ é obtida por

$$\Delta p = m\Delta v = m(v - v_0) = m(v - 3) \implies v = \frac{\Delta p}{m} + 3$$

Como $m = 3kg$, então $v = \dfrac{15}{3} + 3 = 8m/s$.

(b) Já que a variação total de momento linear foi positiva e o movimento é tratado como unidimensional (estamos olhando apenas para F_x), o movimento do bloco segue o mesmo sentido inicial, isto é, no *sentido positivo do eixo x.*

Pode-se olhar também para a velocidade final calculada e perceber que ela é positiva (assim como a velocidade inicial). Caso tivéssemos obtido uma velocidade final negativa, o sentido do movimento do bloco teria invertido, mas não é o que aconteceu nessa análise.

Questão 7

Uma pessoa está atirando com um rifle com um cano de comprimento l_{rifle}. Qual é o módulo da força que deve ser exercida para uma bala (de massa m_{bala}) sair do cano do rifle após 4 ms de ser disparada? (Enunciado corrigido pela monitora Aryella Rabello).

Solução: Através da equação horária das posições, considerando a posição inicial da bala $s_0 = 0$ e que a bala parte do repouso, temos

$$l_{rifle} = \frac{1}{2}at^2$$

onde a é a aceleração desenvolvida pela bala durante o seu movimento. Multiplicando de ambos os lados por m_{bala} e sabendo que $F_m = m_{bala} \cdot a$, temos

$$m_{bala} \cdot l_{rifle} = \frac{1}{2}m_{bala}at^2 = \frac{1}{2}F_m t^2 \iff F_m = \frac{2m_{bala}l_{rifle}}{t^2}$$

Para $t = 4ms = 4 \cdot 10^{-3}s$, a força média, em Newtons, posto que as unidades de m_{bala} e l_{rifle} estão no S.I, será

$$F_m = 125 \cdot 10^3 \cdot m_{bala}l_{rifle}$$

Questão 8

Um pequeno bloco com massa m é colocado dentro de um cone invertido que está girando em torno de um eixo vertical de modo que o tempo para uma rotação do cone é T. As paredes do cone formam um ângulo β com a horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e o cone é μ_s. Se o bloco tiver de permanecer a uma altura constante h acima do ápice do cone, quais são:

(a) O valor máximo de T?

(b) O valor mínimo de T?

Encontre expressões para T em termos de β e h.

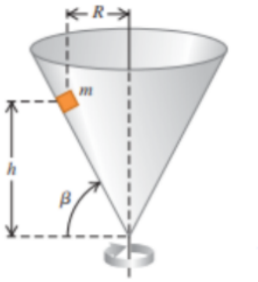
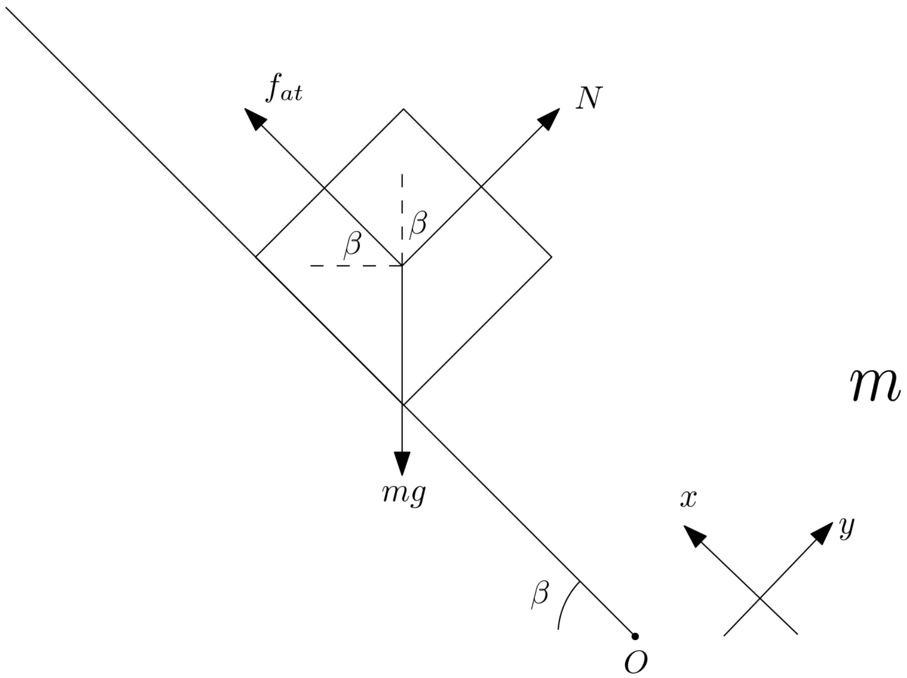


Figura 5: Figura da questão n. 8.

Solução:

(a) Observe a figura abaixo para uma descrição unívoca do referencial e também para o diagrama de forças do pequeno bloco para essa situação.



Para um período T *máximo*, ou seja, demorando o a maior quantidade de tempo o possível, precisamos ter a menor velocidade angular possível tal que o bloco não deslize pelo cone.

Quanto mais rápida for a rotação do cone, maior será a tendência do pequeno bloco "ir para cima"do mesmo, e o contrário ocorre para quanto mais lento for a rotação do cone, tomando como referência a Figura 5, isso porque a velocidade angular está diretamente ligada com a força centrípeta e esta, por sua vez, funciona de modo a criar a tendência mencionada.

Dessa forma, na situação de ω mínimo (T máximo), a tendência do bloco é de descer o cone, portanto a força de atrito apontará para cima ao longo do cone, isto é, no sentido positivo de x da referência utilizada na ilustração disponibilizada.

Uma observação relevante é que durante toda a questão será utilizado que $f_{at} = \mu_s \cdot N$ (que é a força de atrito estático máximo), uma vez que queremos os casos limite para o período.

Assim, realizando a decomposição vetorial de f_{at} e de N em função de β, temos

$$N \sin\beta - f_{at} \cos\beta = m\omega^2 R$$
$$N \cos\beta + f_{at} \sin\beta = mg$$

A primeira equação vem do fato da existência do movimento circular de raio R que o bloco descreve conforme o cone gira, enquanto que a segunda equação vem da condição estática do fato do bloco manter uma altura constante h acima do ápice do cone.

Como $f_{at} = \mu_s \cdot N$, segue

$$N \sin\beta - \mu_s N \cos\beta = N(\sin\beta - \mu_s \cos\beta) = m\omega^2 R$$
$$N \cos\beta + \mu_s N \sin\beta = N(\cos\beta + \mu_s \sin\beta) = mg$$

Dividindo a primeira pela segunda, temos

$$\frac{(\sin\beta - \mu_s \cos\beta)}{(\cos\beta + \mu_s \sin\beta)} = \frac{\omega^2 R}{g}$$

Como $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, substituímos e isolamos a equação para T e encontramos

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{R}\frac{(\sin\beta - \mu_s \cos\beta)}{(\cos\beta + \mu_s \sin\beta)}}$$
$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{R(\cos\beta + \mu_s \sin\beta)}{g(\sin\beta - \mu_s \cos\beta)}}$$

Da trigonometria da Figura 5, temos $\tan\beta = \dfrac{h}{R} \implies R = \dfrac{h}{\tan\beta}$.

Logo, o período desejado em função de β e h é

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{h(\cos\beta + \mu_s \sin\beta)}{g\tan\beta(\sin\beta - \mu_s \cos\beta)}}$$

(b) Já para o valor mínimo de T, o cone deverá rotacionar o mais rápido possível, e a tendência do bloco será a subir ao longo do eixo x positivo. Nessa situação, a força de atrito, que atua de forma contrária, irá apontar para o eixo x negativo.

A decomposição de forças será muito similar à do item (a), com a mudança de que, agora, a força de atrito atua no sentido contrário. Confira as equações para a nova disposição de forças:

$$N \sin\beta + f_{at}\cos\beta = m\omega^2 R$$
$$N \cos\beta - f_{at}\sin\beta = mg$$

Mais uma vez, substituindo $f_{at} = \mu_s N$, temos

$$N(\sin\beta + \mu_s\cos\beta) = m\omega^2 R$$
$$N(\cos\beta - \mu_s\sin\beta) = mg$$

Dividindo a primeira pela segunda:

$$\frac{(\sin\beta + \mu_s\cos\beta)}{(\cos\beta - \mu_s\sin\beta)} = \frac{\omega^2 R}{g}$$

Isolando ω^2, substituindo $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ e isolando T, temos

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{h(\cos\beta - \mu_s\sin\beta)}{g\tan\beta(\sin\beta + \mu_s\cos\beta)}}$$

Questão 9

Os dois blocos ($m = 16$ kg e $M = 88$ kg) da figura não estão ligados. O coeficiente de atrito estático entre os blocos é $\mu_x = 0,38$, mas não há atrito na superfície abaixo do bloco maior. Qual é o menor valor do módulo da força horizontal F para o qual o bloco menor não escorrega para baixo ao longo do bloco maior?

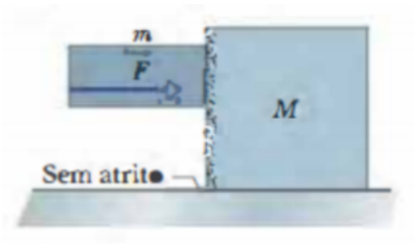
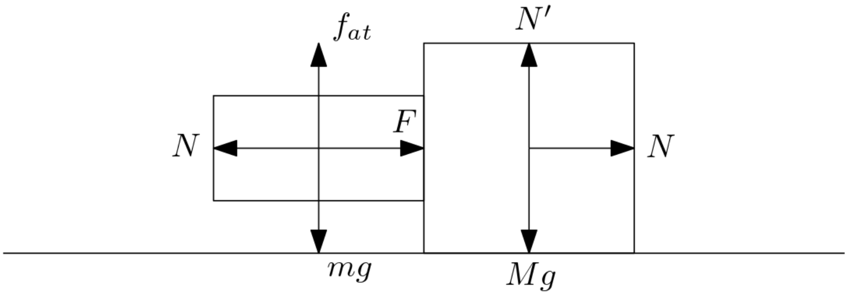


Figura 6: Figura da questão n. 9.

Solução: Observe a ilustração abaixo para o diagrama de forças dos blocos de massa m e M, respectivamente.



Através do diagrama de forças, sabendo que o bloco m não escorrega para baixo ao longo do bloco M e que o movimento do bloco M só ocorre ao longo do plano horizontal, segue as seguintes equações

$$x : F - N = ma, \quad N = Ma \implies N = F\left(\frac{M}{m+M}\right)$$

$$y : f_{at} = \mu_x \cdot N = \mu_x \cdot F\left(\frac{M}{m+M}\right) = mg$$

$$\therefore F = \frac{mg(m+M)}{\mu_x M} \approx 49 \cdot 10^1 N$$

Questão 10

Um bloco é empurrado sobre um piso horizontal por uma força constante que é aplicada fazendo um ângulo de θ para baixo. A figura mostra o módulo da aceleração a em função do coeficiente de atrito cinético μ_k entre o bloco e o piso. Se $a_1 = 3,0 m/s^2$, $\mu_k 2 = 0,20$ e $\mu_k 3 = 0,40$, qual é o valor de θ?

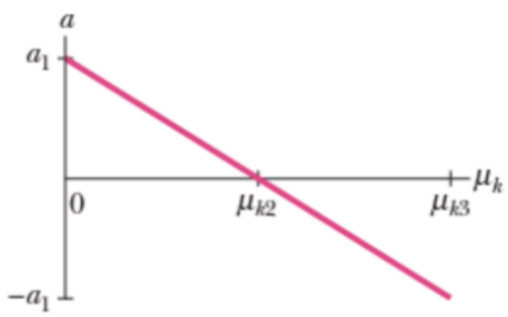
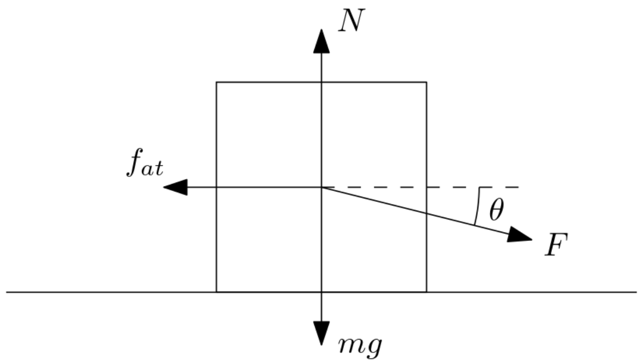


Figura 7: Figura da questão n. 10.

Solução: Abaixo se encontra uma ilustração do diagrama de forças que atua no bloco, confira:



Seja $a(\mu_k)$ a aceleração em função do coeficiente de atrito estático. Do gráfico, é possível interpretar que

$$a(0) = a_1 = 3,0 m/s^2, \quad a(\mu_{k2}) = 0 m/s^2, \quad a(\mu_{k3}) = -a_1 = -3,0 m/s^2$$

onde $\mu_k = 0$ indica que não há atrito, $\mu_{k2} = 0,20$ e $\mu_{k3} = 0,40$, e a massa do corpo foi considerada como sendo m.

No caso sem atrito, o único responsável pela aceleração horizontal do bloco é a componente horizontal da força F, isto é, $F\cos\theta$. Dessa forma, podemos escrever:

$$F\cos\theta = ma_1 = 3m$$

No caso em que $\mu_k = \mu_{k2} = 0,20$, tem-se $a = 0$, então precisamos considerar que na horizontal vale

$$F\cos\theta = f_{at} = \mu_{k2}\cdot N = \mu_{k2}(mg + F\sin\theta) \therefore m = \frac{F}{g\mu_{k2}}(\cos\theta - \mu_{k2}\sin\theta)$$

Dessa forma, combinando as equações, encontramos

$$\frac{\cancel{F}\cos\theta}{3} = m = \frac{\cancel{F}}{g\mu_{k2}}\left(\cos\theta - \mu_{k2}\sin\theta\right)$$

$$\frac{g\mu_{k2}\cos\theta}{3} = \cos\theta - \mu_{k2}\sin\theta \implies \mu_{k2}\sin\theta = \cos\theta\left(1 - \frac{g\mu_{k2}}{3}\right)$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{1}{\mu_{k2}}\left(1 - \frac{g\mu_{k2}}{3}\right) \implies \theta = \arctan\left(\frac{1}{\mu_{k2}}\left(1 - \frac{g\mu_{k2}}{3}\right)\right)$$

Substituindo $\mu_{k2} = 0,20$ e $g = 9,8$, temos

$$\theta \approx 1,04 \text{ rad} \approx 60^\circ$$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

FÍSICA I - 4302111

PROFA. DRA. VALENTINA MARTELLI

LISTA DE PROBLEMAS IV

VICTOR HUGO DOS SANTOS LINS

Email: victorlins@usp.br

17 DE JUNHO DE 2021

Questão 1

Um objeto de massa de aproximadamente 1kg move-se ao longo do eixo x sob o efeito de uma força em função da posição. Essa força é descrita por $F(x) = \alpha x - \beta x^3$.

(a) Se a força é dada em Newtons, avalie a unidade das constantes α e β;

(b) Considerando $\alpha = 5$ e $\beta = 3$, com as unidades apropriadas, calcule a energia potencial V do objeto e faça um gráfico de $V(x)$;

(c) Considerando os valores das constantes do item anterior e que em $x = -2.0\text{m}$ e $v = 5.0\text{m/s}$, calcule a velocidade máxima atingida pelo objeto. Quais são os pontos de retorno do objeto?

Solução:

(a) Uma vez que $F(x) = \alpha x - \beta x^3$, então segue que $[\alpha x] = [F] \implies [\alpha] = \dfrac{[F]}{[x]} = \text{N/m}$. Em termos das unidades básicas, isto é, M, L e T, podemos escrever como: $[\alpha] = M \cdot T^{-2}$.

Também, é necessário que para a equação esteja dimensionalmente coerente tenhamos $[\beta x^3] = [F] \implies [\beta] = \dfrac{F}{x^3} = \text{N/m}^3$. Mais uma vez, expressando em termos das unidades básicas: $[\beta] = M \cdot L^{-2} \cdot T^{-2}$.

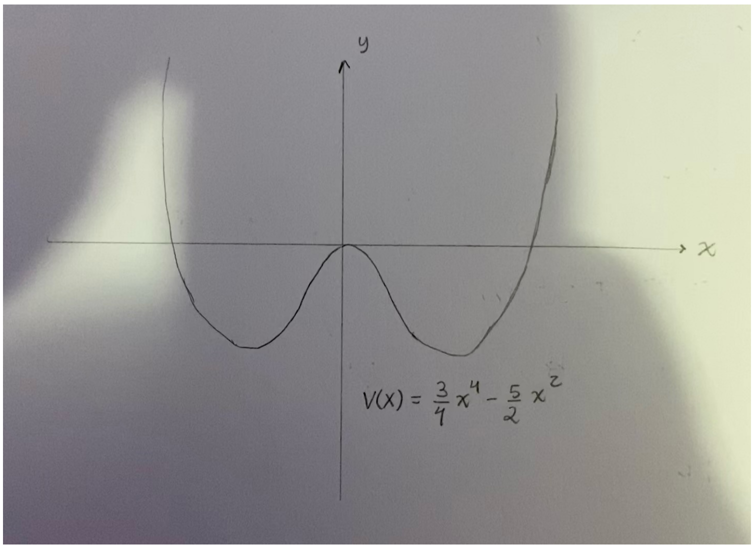
(b) Como a força $F(x)$ é função apenas da posição x, por definição temos que ela deve ser *conservativa*. Assim, $V(x)$ pode ser dado por

$$V(x) = -\int F(x)dx = -\left[\int \alpha x dx - \int \beta x^3 dx\right] = \frac{\beta}{4}x^4 - \frac{\alpha}{2}x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Como $\alpha = 5$ e $\beta = 3$, então a expressão fica

$$V(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + C$$

Na prática, se desejamos plotar o gráfico de $V(x)$, é preciso reconhecer que qualquer gráfico disponibilizado não seria o único correto, uma vez que sempre seria possível afirmar que há uma translação vertical no gráfico por conta do termo C, postas as condições até agora. Apesar disso, disponibilizo um gráfico feito à mão, que representa a situação quando $C = 0$, por conveniência:



(c) Seja E a energia total do sistema. Sabemos que quando $x = -2.0\text{m}, v = 5.0\text{m/s}$. Então, segue que

$$E = V(x) + K = V(-2) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5^2 = 14,5 + C$$

Também, sabemos que o potencial $V(x)$ para um ponto x arbitrário é $V(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + C$. Para um ponto de retorno, K deve ser nulo, o que significa que $V(x) = E$. A partir disso, temos

$$14,5 + \cancel{C} = V(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + \cancel{C} \implies \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 - 14,5 = 0$$

onde os pontos de retorno são os $x \in \mathbb{R}$ que resolvem essa equação de grau 4, isto é

$$x_1 = +\sqrt{\frac{1}{3}(5 + \sqrt{199})}\ \text{m}, \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}(5 + \sqrt{199})}\ \text{m}$$

Além disso, para calcular a velocidade máxima, adotando um referencial em que $C = 0$ e portanto considerando $E = 14,5\text{J}$, sabemos que essa situação ocorrerá quando $V(x)$ anula-se, assim toda a energia mecânica será da forma cinética:

$$K = E = 14,5 \implies \frac{1}{2}mv^2 = 14,5 \therefore v \approx 5,4\ \text{m/s}$$

Questão 2

Considere um balanço como na Figura 1, supondo que a energia potencial não se altera ao colocar o balanço na posição horizontal e desprezando a massa da tábua, mostre:

(a) A relação entre a energia potencial ganha pelo objeto de massa M e a diminuição na energia potencial do objeto de massa m quando o balanço é posicionado na horizontal

(b) A relação entre as grandezas M, m, L e l.

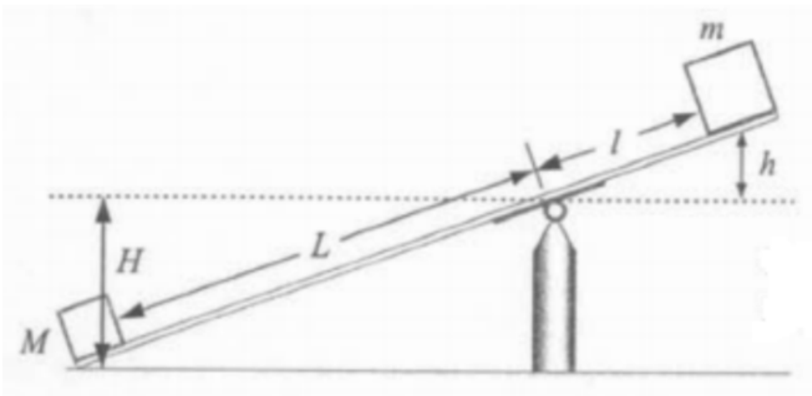


Figura 1: Sistema do exercício 2.

Solução:

(a) O que acontece nesse problema é que possuímos uma configuração inicial dos blocos onde ambos estão em repouso, e depois possuímos uma configuração final, onde os blocos continuam em repouso, porém com uma propriedade interessante: *a energia potencial do sistema na configuração inicial é igual à na configuração final*.

Assumindo o solo como referencial de altura $y = 0$, temos que na configuração inicial o bloco de massa M está encostado no solo (e portanto não possui energia potencial gravitacional), enquanto que o bloco de massa m possui altura $y = (H+h)$ (ver figura), o que implica que carrega uma energia potencial gravitacional de $V_{m0} = mg(H+h)$. Destacando:

$$V_{M0} = 0, \quad V_{m0} = mg(H+h)$$

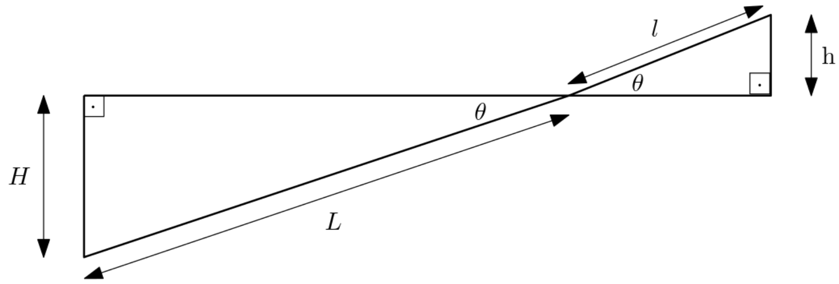
Já na configuração final, o bloco de massa M eleva-se para uma altura $y = H$ e então carrega uma energia potencial gravitacional de $V_M = MgH$, enquanto que o bloco de massa m desce de uma altura h, ficando no mesmo nível que o bloco de massa M, isto é, em $y = H$. Então, a energia potencial gravitacional de cada um é:

$$V_M = MgH, \quad V_m = mgH$$

Então, o bloco de massa M ganhou uma energia potencial igual a MgH, enquanto que o bloco de massa m perdeu uma energia potencial igual a mgh. Como estamos trabalhando com um sistema conservativo, pois o campo gravitacional é conservativo, e esses são os únicos corpos massivos do nosso sistema, é possível afirmar que a energia ganha pelo bloco de massa M é igual à energia perdida pelo bloco de massa m — houve uma transferência de energia.

$$MgH = mgh \implies \frac{h}{H} = \frac{M}{m}$$

(b) Observe os dois triângulos formados utilizando a figura do exercício:



Como eles possuem dois ângulos iguais, são semelhantes, o que nos permite escrever

$$\frac{h}{H} = \frac{l}{L}$$

Mas, da última equação do item (a), sabemos que

$$\frac{h}{H} = \frac{M}{m}$$

Então, concluímos que

$$\frac{M}{m} = \frac{l}{L} \implies ML = ml$$

Esse é um resultado belíssimo, porque pode ser obtido através da condição de equilíbrio rotacional do balanço (igualdade dos *torques*).

Questão 3

Considere o sistema ilustrado na Figura 2, a bolinha de massa m e raio R parte do repouso do ponto A. A bolinha está fixada a um fio inextensível, de massa desprezível e comprimento L. Esse fio suporta uma tensão máxima que depende da massa da bolinha e da aceleração da gravidade tal que, $T_{Max} = 2mg$. Não é necessário considerar a resistência do ar.

(a) Calcule a diferença de altura h entre os pontos A e B. Considere que o fio rompe no ponto B;

(b) Calcule as componentes horizontal e vertical da velocidade da bolinha no momento em que atinge o chão.

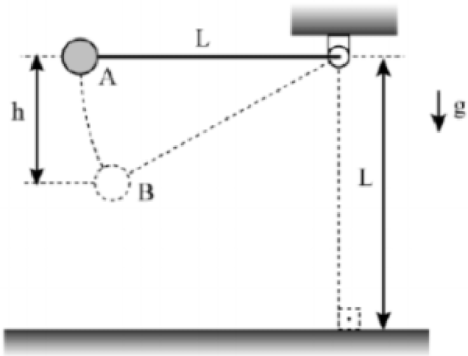
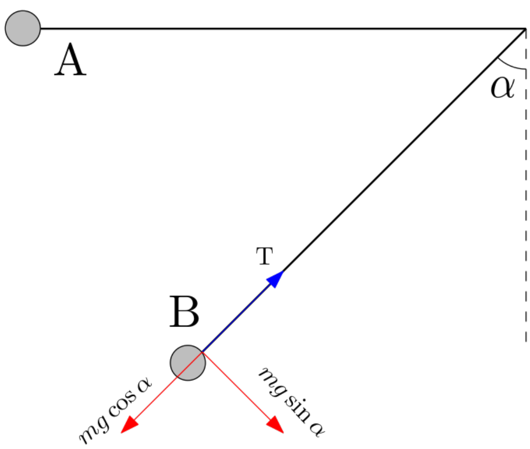


Figura 2: Sistema do exercício 3.

Solução:

(a) Observe a ilustração abaixo para conferir a decomposição vetorial:



Do diagrama de forças, temos que

$$T - mg\cos\alpha = F_{cp},$$

e, também, através da conservação da energia mecânica do sistema (pois a força gravitacional é conservativa), temos

$$mgL = \frac{1}{2}mv^2 + mg(L-h) \implies v^2 = 2gh$$

onde mgL é a energia mecânica no início (relativo a energia potencial gravitacional no ponto A, considerando o solo como $U = 0$), e $\frac{1}{2}mv^2 + mg(L-h)$ é a energia mecânica no final (relativo a soma da energia cinética com a energia potencial no ponto B).

No ponto B foi informado que o fio se rompe, o que significa que a tração atinge o seu valor máximo, isto é, $T = 2mg$. Dessa forma, utilizando a equação para a resultante centrípeta e sabendo que $F_{cp} = \frac{1}{(L+R)}mv^2$, temos

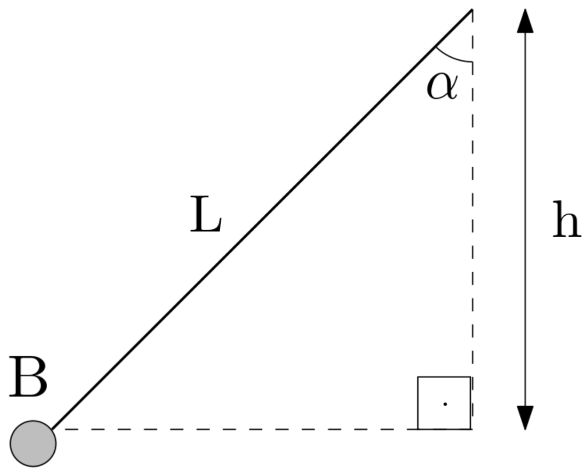
$$2mg = mg\cos\alpha + \frac{1}{L}mv^2$$

mas, calculamos que $v^2 = 2gh$, então segue que

$$2\cancel{mg} = \cancel{mg}\cos\alpha + \frac{1}{(L+R)}2\cancel{mg}h$$

$$\therefore 2 = \cos\alpha + \frac{2h}{(L+R)}$$

Ainda, utilizando o α disponibilizado na ilustração, temos um triângulo retângulo com hipotenusa L e cateto adjacente h, o que nos permite afirmar que $\cos\alpha = \frac{h}{(L+R)}$. Por clareza, observe a figura abaixo.



Dessa forma, nossa equação se torna

$$2 = \frac{h}{(L+R)} + \frac{2h}{(L+R)} \implies h = \frac{2}{3}(L+R)$$

e temos o h desejado.

(b) Já que temos h, podemos escrever que a velocidade no ponto B (antes sendo $v^2 = 2gh$) como $v_B^2 = \frac{4}{3}(L+R)g$. Decompondo essa velocidade na horizontal e vertical em função de α, temos

$$v_{B_x} = v_B \cdot \cos\alpha, \quad v_{B_y} = v_B \cdot \sin\alpha$$

onde sabemos que $\cos\alpha = \frac{h}{(L+R)} = \frac{2}{3}$ e $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ para $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Assim,

$$v_{B_x} = \sqrt{\frac{16}{27}(L+R)g}, \quad v_{B_y} = \sqrt{\frac{20}{27}(L+R)g}$$

Podemos considerar o movimento de queda da bolinha do pêndulo como um lançamento oblíquo de altura inicial $(L-h) = \frac{1}{3}L - \frac{2}{3}R$, velocidade vertical para baixo v_{B_y} e velocidade horizontal para a direita v_{B_x}. Dessa forma, em y, a equação horária das posições avaliada para $y = 0$ (que é o ponto de interesse, isto é, a aterrissagem da bolinha), assume

$$0 = \left(\frac{1}{3}L - \frac{2}{3}R\right) - v_{B_y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

onde o referencial foi tomado no solo, com g e v_{B_y} negativos por esta razão.

O instante de tempo com significado físico $(t > 0)$ que resolve essa equação é

$$t = \frac{\sqrt{38L - 16R} - \sqrt{20L + 20R}}{3\sqrt{3g}} \text{ s}$$

Portanto, a quantidade de tempo que decorre entre o instante em que o fio rompe e a aterrissagem da bolinha é de t conforme calculado.

Utilizando esse tempo, é possível determinar qual é a magnitude da velocidade vertical da bolinha ao chegar no chão, uma vez que

$$v_{y_{solo}} = v_{B_y} + gt$$

onde $g = 9,8 m/s^2$ e t foi conforme calculado.

Ao mesmo tempo, a velocidade horizontal é a mesma de quando o fio foi rompido, uma vez que não há aceleração na horizontal após o lançamento da bolinha. Então,

$$v_{B_x} = v_{x_{solo}} = \sqrt{\frac{16}{27}(L + R)g} \text{ m/s}$$

Em resumo, as componentes vertical e horizontal da velocidade da bolinha no momento que atinge o chão é

$$v_{y_{solo}} = \frac{\sqrt{g(38L - 16R)}}{3\sqrt{3}} \text{ m/s}$$
$$v_{x_{solo}} = \frac{\sqrt{g(16L + 16R)}}{3\sqrt{3}} \text{ m/s}$$

Obs.: vale mencionar que essa questão foi resolvida levando em consideração o raio R da bolinha porque um dos monitores avisou que não era desprezível e era preciso ser considerado. Resultados razoavelmente similares teriam sido obtidos na ausência do raio R, espera-se que isso seja levado em consideração durante a correção.

Questão 4

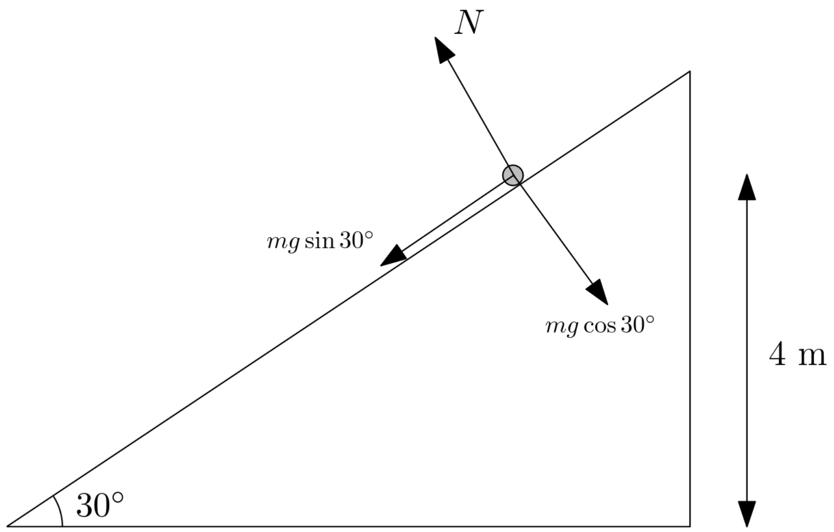
Considerando uma criança de aproximadamente 32 kg brincando em um escorregador que faz um ângulo de 30° com o chão, no qual desliza sem atrito de uma altura de 4 m, responda:

(a) Qual é o trabalho realizado pelo escorregador sobre a criança?

(b) Qual é o trabalho realizado pela gravidade sobre a criança?

(c) Qual será a velocidade final da criança?

Solução: Observe a ilustração a seguir para que conclusões possam ser tomadas apropriadamente durante o desenvolvimento:



(a) A força que o escorregador emprega sobre a criança é a força Normal. Como esta força é sempre perpendicular à trajetória por definição, *o trabalho realizado pelo escorregador sobre a criança será nulo*, conclusão essa que deriva imediatamente da definição de trabalho (dependente do produto escalar entre a força e o deslocamento).

(b) Como a força peso é uma força conservativa, ela só depende dos pontos final e inicial. Isso nos permite dizer que o trabalho do ponto de partida até a base do escorregador é

$$W_P = mg \cdot \Delta h = 32 \cdot 9,8 \cdot 4 \approx 1254 J$$

(c) Por fim, ainda sabendo que a força peso é conservativa e que as outras forças que atuam na criança são perpendiculares à trajetória, a energia mecânica no início deve ser igual à energia mecânica no final:

$$E_{m_0} = E_m \implies mgH = \frac{1}{2}mv^2 \implies v = \sqrt{2gH}$$
$$\therefore v = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 4} \approx 8,85 \text{ m/s}$$

Questão 5

Uma partícula de massa $m = 5$ kg está se movimentando em um reta. Entre os pontos $x = 0$ e $x = 14$ m esta partícula está sujeita a uma força descrita pelo gráfico da Figura 3. Considerando que em $x = 0$ a velocidade é igual a 3 m/s, calcule a velocidade da partícula após percorrer 4, 6, 8, 12 e 14 metros.

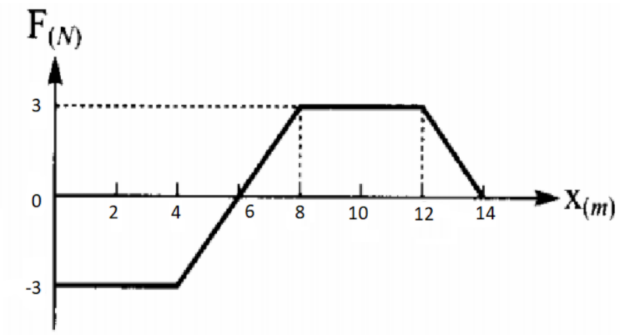


Figura 3: Gráfico exercício 5.

Solução: Para resolver essa questão utilizaremos o teorema do trabalho e energia cinética, que diz que o trabalho é igual à variação da energia cinética.

O método empregado consistirá em calcular a área do gráfico entre as variações de espaço solicitadas no enunciado, que é o trabalho da força F por definição, e igualar esse trabalho à variação da energia cinética da partícula.

Como sabemos que a velocidade inicial em $x = 0$ é $v_0 = 3$ m/s, todas as outras velocidades podem ser obtidas através do teorema do trabalho e energia cinética. Expostos os argumentos e a justificativa do método, agora vem os cálculos:

$$W_{0,4} = 4 \cdot (-3) = -12 \text{ J}$$
$$\Delta K_{0,4} = \frac{1}{2}mv_4^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_{0,4}$$
$$\implies v_4 = \sqrt{\frac{2W_{0,4}}{m} + v_0^2} \approx 2,049 \text{ m/s} \approx 2,0 \text{ m/s}$$

$$W_{4,6} = \frac{2 \cdot (-3)}{2} = -3 \text{ J}$$
$$\Delta K_{4,6} = \frac{1}{2}mv_6^2 - \frac{1}{2}mv_4^2 = W_{4,6}$$

$$\implies v_6 = \sqrt{\frac{2W_{4,6}}{m} + v_4^2} \approx 1,731 \text{ m/s} \approx 1,7 \text{ m/s}$$

$$W_{6,8} = \frac{2 \cdot (3)}{2} = 3 \text{ J}$$

$$\Delta K_{6,8} = \frac{1}{2}mv_8^2 - \frac{1}{2}mv_6^2 = W_{8,6}$$

$$\implies v_8 = \sqrt{\frac{2W_{6,8}}{m} + v_6^2} \approx 2,049 \text{ m/s} \approx 2,0 \text{ m/s}$$

$$W_{8,12} = 4 \cdot (3) = 12 \text{ J}$$

$$\Delta K_{8,12} = \frac{1}{2}mv_{12}^2 - \frac{1}{2}mv_8^2 = W_{8,12}$$

$$\implies v_{12} = \sqrt{\frac{2W_{8,12}}{m} + v_8^2} \approx 2,999 \text{ m/s} \approx 3,0 \text{ m/s}$$

$$W_{12,14} = \frac{2 \cdot (3)}{2} = 3 \text{ J}$$

$$\Delta K_{12,14} = \frac{1}{2}mv_{14}^2 - \frac{1}{2}mv_{12}^2 = W_{12,14}$$

$$\implies v_{14} = \sqrt{\frac{2W_{12,14}}{m} + v_{12}^2} \approx 3,193 \text{ m/s} \approx 3,2 \text{ m/s}$$

onde as aproximações efetuadas na última linha de cada conclusão foram feitas de modo a manter a quantidade coerente de algarismos significativos.

Questão 6

O gráfico da Figura 4 ilustra a energia potencial de uma partícula que é expressa pela equação $U(x) = 3x - 4x^2 - 0,45x^3 + 0,6x^4$ em unidades do SI.

(a) Faça um gráfico da força $F(x)$;

(b) Quais são os pontos de equilíbrio da partícula?

(c) Se a energia da partícula for $E = 0$J, quais são os movimentos possíveis?;

(d) Se a energia da partícula for $E = -5$J, quais são os pontos de retorno? Indique no gráfico.

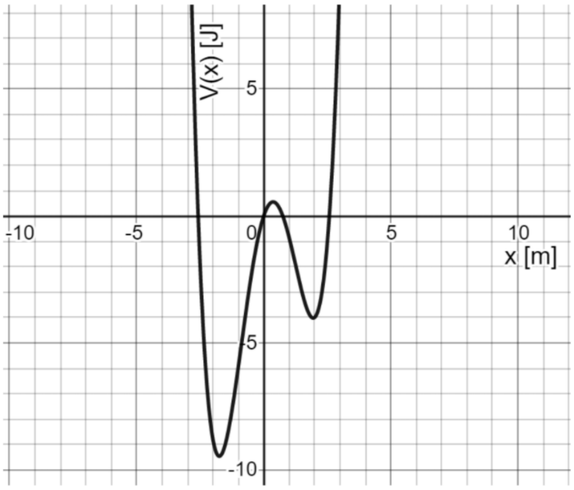


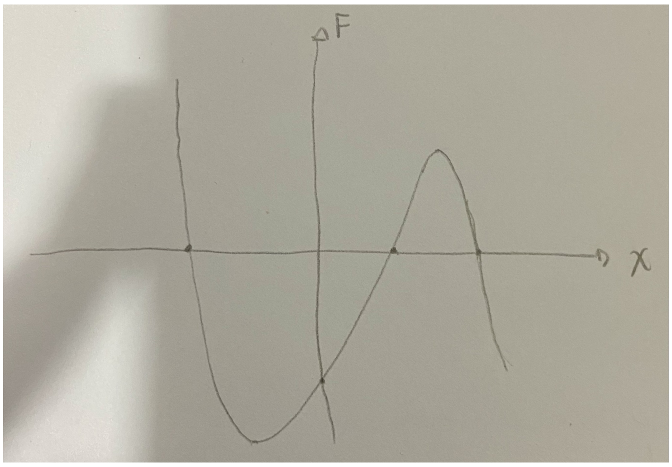
Figura 4: Gráfico questão 6.

Solução:

(a) Sabendo que existe um potencial que descreve o movimento da partícula, esta deve estar submetida a uma força conservativa. Dessa forma, podemos dizer que

$$F = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(3x - 4x^2 - 0,45x^3 + 0,6x^4\right) = -2,4x^3 + 1,35x^2 + 8x - 3$$

Cujo gráfico é da forma a seguir:



(b) Os pontos de equilíbrio são os pontos em que a força se anula, isto é, quando $F = 0$. Utilizando a expressão para a força derivada no item (a), temos

$$-2,4x^3 + 1,35x^2 + 8x - 3 = 0 \iff x \in \{-1,75; 0,36; 1,94\}\ m$$

Onde o conjunto solução obtido são as raízes reais da equação cúbica acima, aproximadas para duas casas decimais.

(c) Se $E = 0J$ e sabendo que, por definição, vale $V \leq E$, então os movimentos possíveis são todos aqueles em que $V \leq 0$. Para uma visualização utilizando o gráfico da Figura 4, observe a imagem a seguir:

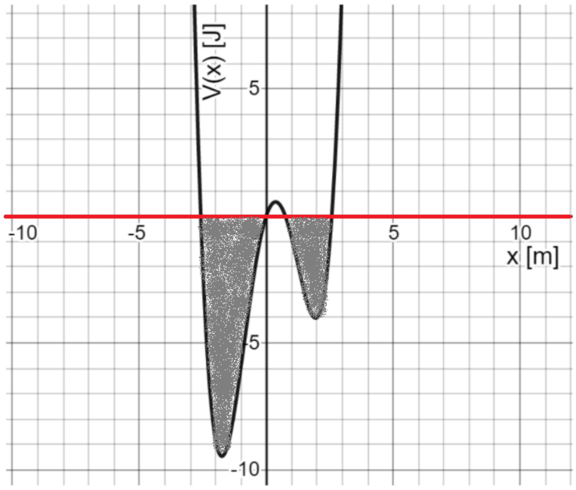


Figura 4: Gráfico questão 6.

A reta horizontal em vermelho representa o nível de $E = 0$. A zona hachurada em cinza simboliza as regiões em que existe um valor de $V(x)$ possível ao movimento.

A primeira zona cinza, à esquerda, possui como extremidades as duas primeiras raízes da equação do 4° grau $V(x) = 3x - 4x^2 - 0,45x^3 + 0,6x^4$, enquanto que a segunda zona cinza, à direita, possui como extremidades as outras duas raízes da mesma equação.

Pelo gráfico podemos inferir que as mencionadas extremidades são o maior valor possível para $V(x)$ dentre os valores permitidos ao movimento, o que simboliza os menores valores possíveis para K, a energia cinética da partícula. Por definição, essas extremidades devem ser os *pontos de retorno*.

Portanto, concluímos que os movimentos possíveis são de cunho oscilatório com extremidades nas quatro raízes de $V(x)$.

(d) Com essas novas condições, o gráfico a seguir pode traduzir uma visualização dos pontos de retorno:

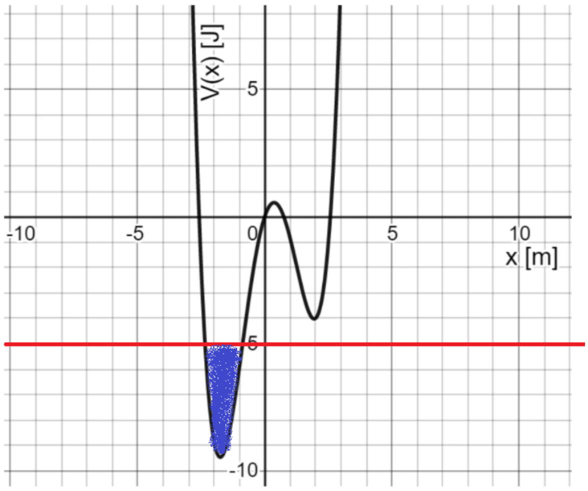


Figura 4: Gráfico questão 6.

Percebe-se que dessa vez, por $E = -5J$, a reta horizontal vermelha está numa posição diferente no gráfico. Além disso, em comparação com o item c, a antiga "segunda zona cinza"não é mais acessível à partícula, restando apenas a atual zona pintada de azul na figura.

Os pontos de retorno são, mais uma vez, as "extremidades"da zona, isto é, os pontos em que o gráfico de $V(x)$ coincide com E, pois $V(x) \leq E$ e por definição os pontos de retorno ocorrem quando a igualdade vale.

Então, como sabemos que $V(x) = 3x - 4x^2 - 0,45x^3 + 0,6x^4$, a equação que nos dá os pontos de retorno é

$$3x - 4x^2 - 0,45x^3 + 0,6x^4 = -5$$

cujas soluções $\in \mathbb{R}$ são

$$x_1 = -2,35 \text{ m}, \quad x_2 = -0,87 \text{ m}$$

Questão 7

Um sistema com N pequenos cubos (pequenos o suficiente para serem considerados massas pontuais) estão conectados por um cabo ideal (com zero massa e inextensível), cada cubo está a uma distância a do próximo. Suponha que N_2 dos N cubos estão dispostos em um plano situado em um penhasco muito alto (Na muito menor que a altura do penhasco) e os outros estão inicialmente pendurados e guiados por uma canaleta, para que enquanto um cubo estiver em queda todo seu movimento estar paralelo ao campo gravitacional. Em um momento o sistema é liberado e os quadrados começam a cair em linha reta. Considere a aceleração gravitacional constante e com módulo g. Despreze qualquer efeito dissipativo.

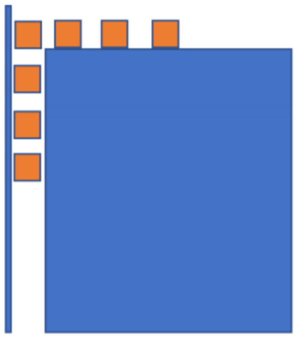


Figura 5: Exemplo com $N = 7$ cubos e $N_2 = 4$

(a) Em um instante t_0, instantaneamente após N_3 blocos estarem em queda, ($N_3 > N_2$) qual é o modulo da velocidade dos blocos? (Use conservação de energia para resolver esta alternativa)

(b) Quanto tempo levará entre o instante t_0 e o instante em que o próximo bloco começará a cair? (Não é necessário substituir a velocidade encontrada em (a), apenas indicar no exercício anterior)

(c) Calcule explicitamente o trabalho que a força de tração aplicada no ultimo bloco exerce até o momento que o bloco de sua frente caia. Considere a massa do bloco como m. Calcule explicitamente usando a formula integral para o trabalho.

Solução:

(a) Para encontrar o módulo da velocidade dos blocos, utilizaremos conservação de energia. No início, com o sistema em repouso, só há energia potencial gravitacional. Já no final, os blocos estarão se movendo e haverá uma nova configuração de energia potencial. Na prática, escrevemos

$$U_0 = U_{N_3} + K$$

onde U_0 representa a energia potencial gravitacional do sistema no início, U_{N_3} é a energia potencial gravitacional do sistema no final e K é a energia cinética do conjunto de blocos.

Sabendo que a energia potencial gravitacional de um corpo é dada por $U = mgh$ onde h é a separação vertical do corpo até um ponto de referência, calcularemos as energias desejadas.

No início, tomando a referência para $h = 0$ como o centro de massa dos blocos que estão situados no plano do topo do penhasco, teremos $N - N_2$ blocos abaixo desse nível $h = 0$, onde o primeiro estará em $h = a$, o segundo estará em $h = 2a$ e por aí vai, numa progressão aritmética de razão a, que é a distância entre os blocos. Portanto, a energia potencial gravitacional dos blocos no início é

$$U_0 = mga + mg(2a) + \ldots + mg(N - N_2)a = mga \cdot \sum_{i=1}^{(N-N_2)} i$$

$$= mga \left[\frac{(1 + N - N_2) \cdot (N - N_2)}{2} \right] \text{ J}$$

No final, a energia potencial gravitacional será relativa aos N_3 blocos que já estão em queda, isto é, perderam o contato com o penhasco. Porém, como t_0 é instantaneamente após N_3 blocos estarem em queda, o primeiro bloco ainda possui centro de massa na altura $h = 0$, restando $N_3 - 1$ blocos carregando efetivamente energia potencial gravitacional não nula. Dessa forma, temos

$$U_{N_3} = mga[1 + 2 + \ldots + (N_3 - 1)] = mga \cdot \sum_{i=1}^{N_3-1} i$$

$$mga \left[\frac{(1 + N_3 - 1)(N_3 - 1)}{2} \right] = mga \frac{N_3(N_3 - 1)}{2} \text{ J}$$

Ainda, a energia cinética K dos blocos é equivalente a energia cinética de um *grande bloco* de massa $N \cdot m$ porque eles estão vinculados pelo cabo ideal (carregando a mesma velocidade) e pelo fato de que o conjunto de blocos é muito menor que a dimensão do penhasco $Na \ll H$. Assim,

$$K = \frac{1}{2}(Nm)v^2$$

O que nos permite escrever

$$U_0 = U_{N_3} + K \iff v = \sqrt{\frac{ag}{N} \cdot [(1 + N - N_2)(N - N_2) - N_3(N_3 - 1)]} \text{ m/s}$$

(b) Entre t_0 e o instante em que o próximo bloco começará a cair, podemos considerar a aceleração como constante por conta das dimensões dos blocos comparativamente ao penhasco. Entretanto, uma vez que o próximo bloco começar a cair, a aceleração altera instantaneamente. O comportamento é o mesmo da *função maior inteiro* $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

Dessa forma, durante esse trajeto em que a aceleração é constante, podemos calculá-la montando o diagrama de forças para cada bloco do conjunto e aplicando a segunda lei de Newton a cada um deles. Reconhece-se que todas as forças de tração ao longo do fio irão se cancelar e o efeito resultante será o de que os blocos que apenas o peso dos N_3 blocos em queda são levados em consideração como força resultante enquanto que o peso do conjunto dos N blocos serve como massa total do sistema. Simbolicamente,

$$N_3 \cdot mg = Nm \cdot \gamma \implies \gamma = \frac{N_3}{N} g$$

onde γ é aceleração do sistema.

Assim, o instante de tempo em que o próximo bloco começa a cair é tal que podemos usar a equação horária das posições:

$$a = vt + \frac{1}{2}\gamma t^2$$

onde a é a distância entre dois blocos consecutivos a ser percorrida, v é a velocidade calculada no item (a), γ é a aceleração do sistema que acabamos de calcular e t é o instante de tempo desejado.

Tomando a raíz positiva da equação (t com sentido físico desejado) temos

$$t = \frac{\sqrt{v^2 + 2a\gamma} - v}{\gamma}$$

Finalmente, o tempo que levará entre o instante t_0 e o instante em que o próximo bloco começará a cair é

$$\Delta t = t - t_0$$

onde t e t_0 são conhecidos.

(c) O trabalho que a força de tração aplicada no último bloco até o momento que o bloco de sua frente caia é dado por

$$W = \int_0^d T \cdot dx$$

onde $d = [(N - N_3) - 1]a$.

É importante ressaltar que $T = m \cdot \gamma(\eta)$ onde $\gamma(\eta)$ é uma função que descreve a aceleração do sistema quando η blocos estão em queda. Portanto, a força que realiza o trabalho é uma força variável. Do item anterior, sabíamos que quando N_3 blocos estavam em queda tínhamos

$$\gamma = \frac{N_3}{N} g$$

Da mesma forma, quando η blocos estiverem em queda teremos

$$\gamma(\eta) = \frac{\eta}{N} g$$

Além disso, no intervalo de integração utilizei $d = [(N - N_3) - 1]a$ porque este é o deslocamento que precisa ser feito até que o bloco à frente do último bloco esteja em queda, resultado esse que é derivado da geometria do problema.

Dito tudo isso, pode-se escrever

$$W = \int_0^a T_1 \cdot dx + \int_a^{2a} T_2 \cdot dx + \ldots + \int_{d-1}^{d} T_{(N-N_3)-1} \cdot dx$$

$$W = \sum_{i=1}^{(N-N_3)-1} \int_{(i-1)a}^{(i)a} T_i \cdot dx$$

onde $T_i = m \cdot \dfrac{(N_3 - 1) + i}{N} g$ é construído de forma consistente com o problema. Note que quando $i = 1$ temos uma aceleração γ relativa a N_3 blocos em queda, o que se refere à primeira parcela do trabalho

$$\int_0^a T_1 \, dx$$

e assim por diante, conforme iteramos i.

Para esse desenvolvimento foi explorado o fato de que a aceleração desse sistema segue o mesmo comportamento da função maior inteiro, o que significa que entre deslocamentos a consecutivos a aceleração (e a força de tração no último bloco) serão constantes, mas variam para um valor maior depois que o deslocamento é concluído.

Por fim, o trabalho que a força de tração aplicada no último bloco até o momento que o bloco de sua frente caia é dado por

$$W = \int_0^a mg \cdot \frac{N_3}{N} \cdot dx + \int_a^{2a} mg \cdot \frac{N_3+1}{N} \cdot dx + \ldots + \int_{d-1}^{d} mg \cdot \frac{N-2}{N} \cdot dx$$
$$W = \frac{mga}{N} \left[N_3 + (N_3+1) + \ldots + (N-2)\right]$$
$$W = \frac{mga}{N} \cdot \left[\frac{(N+N_3-2)\cdot(N-N_3-1)}{2}\right]$$

onde a última passagem foi feita considerando uma progressão aritmética de $a_1 = N_3$, $a_n = (N-2)$ e quantidade de termos $(N - N_3 - 1)$.

Questão 8

Considere que uma partícula de massa m esta fazendo uma trajetória circular de raio constante e esta submetida ao seguinte potência central, $U(r) = \frac{\alpha}{r}$, onde α é uma constante e r é a distancia do centro da rotação. Além disso, a grandeza $L = mr^2\frac{d\theta}{dt}$ é conservada (não varia com o tempo e por isso L é uma constante, $\theta(t)$ representa a equação horaria do ângulo). Determine qual a condição sobre α para que exista um mínimo de energia e também determine qual o raio finito que minimiza a energia.
Use que o mínimo da energia neste caso coincide com o ponto em que a derivada é nula, $\frac{dE}{dr}]_{r_0} = 0$

Solução: Pode-se escrever a energia mecânica da partícula como

$$E = K + U(r) = \frac{mv^2}{2} + \frac{\alpha}{r} = \frac{m\omega^2 r^2}{2} + \frac{\alpha}{r}$$

onde foi utilizado que $v = \omega r$, com $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, uma vez que não há referências a forças na direção tangencial ao movimento, portanto trata-se de um movimento circular uniforme e vale a relação utilizada.

Sabendo que a partícula está submetida a uma energia potencial dependente apenas da posição, temos a atuação de uma força conservativa o que nos permite dizer que $\frac{dE}{dt} = 0$. Além disso, derivando a equação da energia mecânica em relação a r e igualando a zero (condição de minimização de energia), temos

$$\left[\frac{dE}{dr}\right]_{r_0} = \left[m\omega^2 r - \frac{\alpha}{r^2}\right]_{r_0} = 0 \implies r_0 = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{m\omega^2}}$$

Além disso, derivando mais uma vez em relação a r, encontramos

$$\left[\frac{d^2E}{dr^2}\right]_{r_0} = \left[m\omega^2 + \frac{2\alpha}{{r_0}^3}\right] > 0$$

onde é necessário que $\left[\frac{d^2E}{dr^2}\right]_{r_0} > 0$ para garantir que trata-se de um *mínimo* de energia. Assim,

$$\alpha > -\frac{m\omega^2 r^3}{2} = -\frac{\cancel{m\omega^2}}{2} \cdot \frac{\alpha}{\cancel{m\omega^2}} \implies \alpha > -\frac{\alpha}{2}$$
$$\iff \alpha > 0$$

Portanto, a condição imposta sobre α para que exista um mínimo de energia é que $\alpha > 0$ e o raio finito que minimiza a energia é

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{m\omega^2}}$$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

FÍSICA I - 4302111

PROFA. DRA. VALENTINA MARTELLI

LISTA DE PROBLEMAS V

VICTOR HUGO DOS SANTOS LINS

Email: victorlins@usp.br

3 DE JULHO DE 2021

Questão 1

Um bloco de madeira e um revólver estão firmemente fixos nas extremidades opostas de uma longa plataforma montada sobre um trilho de ar. sem atrito. O bloco e o revólver estão separados por uma distância L. O sistema está inicialmente em repouso. O revólver dispara uma bala que o abandona com uma velocidade v_b atingindo o bloco e nele se encravando. A massa da bala é m_b e a massa do sistema revólver-plataforma-bloco é m_p.

(a) Qual é a velocidade da plataforma imediatamente após a bala sair do revólver?

(b) Qual é a velocidade da plataforma imediatamente após a bala atingir o repouso dentro do bloco?

(c) Qual é a distância percorrida pela plataforma, enquanto a bala está em trânsito entre o revólver e o bloco?

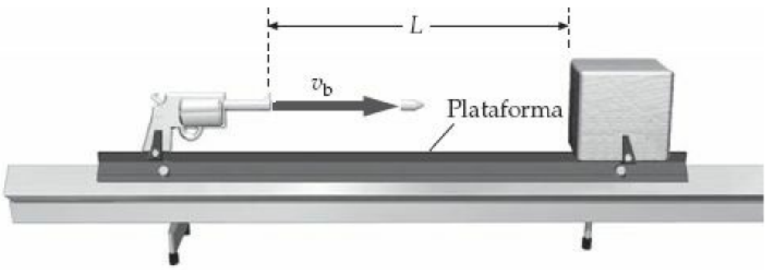


Figura 1: Sistema do exercício 1.

Solução:

(a) No início, todos os corpos estão em repouso, portanto o momento linear total do sistema p_0 é nulo, e conserva-se nesse valor uma vez que a todo instante não há forças externas atuando na direção horizontal. Assim,

$$p_0 = p = 0$$

onde p é o momento linear do sistema depois que o revólver foi disparado e a bala escapa do seu cano, isto é

$$p = m_b \cdot v_b - m_p \cdot v_p = 0$$

onde aqui adotamos o sentido positivo para a velocidade como sendo para a direita e negativo para a esquerda. Além disso, v_p é a velocidade do sistema revólver-plataforma-bloco após a bala sair do revólver. Dessa forma,

$$v_p = \frac{m_b}{m_p} v_b$$

(b) O momento linear total do sistema desde o momento em que a bala sai do revólver até o momento em que atinge repouso total quando encravada no bloco é nulo. Então, se a bala possui sua velocidade reduzida a zero, o mesmo acontecerá com a velocidade da plataforma, caso contrário o momento linear do sistema não seria conservado, o que é absurdo. O que ocorre é que a interação entre a bala e o bloco via forças internas são responsáveis por desacelerar o movimento de ambos, sem a menção a nenhum tipo de força externa.

Analiticamente,

$$0 = m_b \cdot v_b - m_p \cdot v_p = m_b \cdot v_b' + m_p \cdot v_p'$$

onde v_b' e v_p' são as velocidades da bala e do sistema revólver-plataforma-bloco imediatamente após a bala atingir o repouso. Assim,

$$0 = m_p \cdot v_p' \implies v_p' = 0$$

e concluímos que a velocidade da plataforma imediatamente após a bala atingir o repouso dentro do bloco será zero.

(c) Colocando o referencial na bala, a velocidade do bloco em relação a bala será constante e igual a $(v_b + v_p)$. O tempo até que a colisão ocorra é dado por

$$\Delta t = \frac{L}{(v_b + v_p)}$$

Durante esse tempo, a plataforma percorre uma distância em relação ao solo de

$$\Delta s = v_p \cdot \Delta t = \frac{L v_p}{(v_b + v_p)}$$

Questão 2

Uma montagem experimental de seu laboratório de física consiste em dois deslizadores sobre um trilho de ar horizontal sem atrito. Cada deslizador carrega, sobre si, um forte ímã, e os ímãs estão orientados de forma a se atraírem mutuamente. A massa do deslizador 1, com seu ímã, é 0,100 kg, e a massa do deslizador 2, com seu ímã, é 0,200 kg. Você e seus colegas são instruídos a tomarem como origem a extremidade da esquerda do trilho e a centrarem o deslizador 1 em x_1 = 0, 100 m e o deslizador 2 emx_2 = 1, 600 m. O deslizador 1 tem um comprimento de 10,0 cm, enquanto o comprimento do deslizador 2 é 20,0 cm, e cada deslizador tem o centro de massa localizado em seu centro geométrico. Quando os dois deslizadores são largados a partir do repouso, eles se movem até se encontrarem e grudarem um no outro.

(a) Determine a posição do centro de massa de cada deslizador no momento em que eles se tocam.

(b) Determine a velocidade com que os dois deslizadores continuarão a se mover após grudarem. Explique seu raciocínio.

Figura 2: Sistema do exercício 2.

Solução:

(a) É conhecido que

$$M\mathbf{a_{CM}} = \mathbf{F_{ext}}$$

onde $\mathbf{F_{ext}}$ é o somatório de todas as forças externas atuando em todas as partículas do sistema.

Como os ímãs estão sendo mutuamente atraídos através da força magnética (que é de igual magnitude e direção porem sentidos contrários atuando nos ímãs), podemos dizer que $\mathbf{F_{ext}} = 0$ na direção horizontal. Portanto, o centro de massa do sistema deve possuir a todo instante velocidade constante.

Dessa forma, como o sistema parte do repouso (velocidade inicial nula), o centro de massa do sistema fica fixo no seu ponto de origem durante todo o movimento de aproximação dos conjuntos deslizadores/ímã.

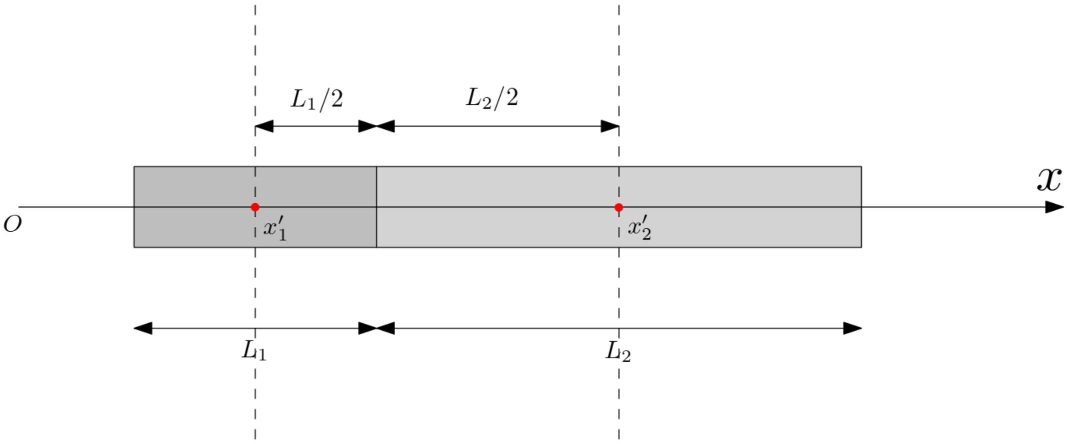
Seja $L_1 = 0,100$ m o comprimento do primeiro deslizador e $L_2 = 0,200$ m o comprimento do segundo deslizador. Do enunciado, sabemos que o centro de massa de cada deslizador localiza-se em $\frac{L_1}{2}$ e $\frac{L_2}{2}$, respectivamente. Sabendo que a origem do nosso sistema de coordenadas se localiza na extremidade esquerda do trilho, podemos escrever a equação para o centro de massa do sistema de dois deslizadores:

$$r_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{(m_1 + m_2)}$$

onde $x_1 = 0,100$ m e $x_2 = 1,600$ m são a posição do centro dos deslizadores em relação à origem do nossos sistema de coordenadas. Além disso, podemos dizer que, no momento em que os deslizadores se chocam, vale

$$x_2' = x_1' + \frac{L_1}{2} + \frac{L_2}{2}$$

onde x_1' é a posição do centro do primeiro deslizador e x_2' é a posição do segundo deslizador no momento do choque. Isso é justificado por causa da geometria do problema, e você pode conferir esse argumento observando a ilustração abaixo:



Ainda no momento em que os deslizadores se chocam, sabendo que o centro de massa não pode se mover, é necessário que vigore

$$r_{CM} = \frac{m_1 x_1' + m_2 x_2'}{(m_1 + m_2)}$$

Portanto, comparando com a outra equação utilizada para calcular o centro de massa e sabendo que em todo esse tempo ele não saiu do lugar segundo argumentos já estabelecidos, temos

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 x_1' + m_2 x_2'}{(m_1 + m_2)} \iff m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1 x_1' + m_2 x_2'$$

Como sabemos que $x_2' = x_1' + \frac{L_1}{2} + \frac{L_2}{2}$, então

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1 x_1' + m_2 \left(x_1' + \frac{L_1}{2} + \frac{L_2}{2} \right)$$

$$\therefore x_1' = \frac{1}{(m_1 + m_2)} \left[m_1 x_1 + m_2 \left(x_2 - \frac{L_1 + L_2}{2} \right) \right] = 1,000 \text{ m}$$

onde o último resultado foi obtido utilizando que $m_1 = 0,100$ kg, $m_2 = 0,200$ kg, $x_1 = 0,100$ m, $x_2 = 1,600$ m, $L_1 = 0,100$m e $L_2 = 0,200$ m.

Como descobrimos que $x_1' = 1,000$ m e sabemos que $x_2' = x_1' + \frac{L_1}{2} + \frac{L_2}{2}$, temos

$$x_2' = x_1' + \frac{L_1}{2} + \frac{L_2}{2} = 1,150 \text{ m}$$

Dessa forma, a posição do centro de massa de cada deslizador no momento em que eles se tocam em relação à extremidade esquerda do trilho é $x_1' = 1,000$ m para o deslizador 1 e $x_2' = 1,150$ m para o deslizador 2.

(b) Mesmo após os deslizadores se chocarem, não há razões para que a condição imposta sobre o centro de massa de modifique. Reconhecemos que as únicas forças atuantes na horizontal são as de origem magnética, e que após os deslizadores se chocarem essa condição não muda. Portanto, após o choque, eles se juntam e atingem o repouso, conservando o momento linear total do sistema no começo (nulo).

Questão 3

Na molécula de amônia (NH_3), três átomos de hidrogênio (H) formam um triângulo equilátero, com o centro do triângulo a uma distância $d = 9,40 \times 10^{-11}$ m de cada átomo de hidrogênio. O átomo de nitrogênio (N) está no vértice superior de uma pirâmide, com os três átomos de hidrogênio formando a base. A razão entre as massas do nitrogênio e do hidrogênio é 13,9 e a distância nitrogênio-hidrogênio é $L = 10,14 \times 10^{-11}$ m.

(a) Qual a coordenada x do centro de massa?

(b) Qual a coordenada y do centro de massa?

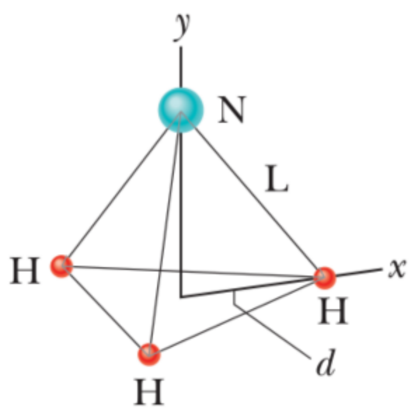


Figura 3: Sistema do exercício 3.

Solução:

(a) Em primeiro lugar, precisamos definir o referencial. Para tanto, tomarei o eixo y de forma que o eixo passa pelo centro de massa do átomo de Nitrogênio e é perpendicular ao plano onde se encontram os três átomos de hidrogênio exatamente no ponto central do triângulo equilátero, por conta da simetria da pirâmide. Além disso, tomarei o eixo x como sendo pertencente ao plano em que os átomos de hidrogênio estão contidos, perpendicular ao eixo y e coincidindo com o centro de massa de um dos átomos de hidrogênio. No final, os eixos ficarão muito parecidos com os que estão apresentados na figura da questão, então considero que agora há uma descrição sem ambiguidade do referencial.

Um fato a ser utilizado agora é um resultado bem conhecido a respeito do centro de massa. Queremos saber o centro de massa da molécula de NH_3, para tanto, devemos reconhecer que

$$M\vec{r}_{NH_3} = m_N\vec{r}_N + m_{H_3}\vec{r}_{H_3}$$

onde $\vec{r}_{NH_3}, \vec{r}_N$ e $\vec{r}_{H_3}$ são os vetores que localizam o centro de massa da molécula de amônia, do átomo de nitrogênio e dos átomos de hidrogênios, respectivamente, e M, m_N e m_{H_3} são as massas do sistema como um todo, do átomo de hidrogênio e da tripla de hidrogênios, respectivamente.

Basicamente o que essa equação está dizendo é que a soma vetorial do vetor centro de massa do átomo de nitrogênio com o vetor centro de massa da tripla de hidrogênios é igual ao vetor centro de massa da molécula de amônia. Esse é um resultado que deriva do teorema que afirma que para encontrar o centro de massa de um sistema de partículas podemos encontrar o de duas ou mais partes do sistema e depois somar os resultados vetorialmente.

Por simetria, como todos os átomos de hidrogênio possuem a mesma massa, então o centro de massa da tripla de átomos de hidrogênio se localizará exatamente no centro do triângulo equilátero, ou seja, coincide com a origem do nosso sistema de coordenadas. Logo, $\vec{r}_{H_3} = \vec{0}$. Assim,

$$\vec{r}_{NH_3} = \frac{m_N}{M}\vec{r}_N = \frac{m_N}{(3m_H + m_N)}\vec{r}_N = \frac{1}{\left(3\dfrac{m_H}{m_N} + 1\right)}\vec{r}_N$$

Do enunciado, sabemos que $\dfrac{m_H}{m_N} = \dfrac{1}{13,9}$, assim

$$\vec{r}_{NH_3} = \frac{13,9}{(3 + 13,9)}\vec{r}_N$$

Além disso, da figura da questão, sabemos que

$$\vec{r}_N = r_N \cdot \hat{j}$$

onde $\hat{j}$ é o vetor unitário que aponta na direção positiva do nosso eixo y e r_N é o módulo de $\vec{r}_N$. Esse módulo pode ser obtido através do teorema de pitágoras com o triângulo de lados L e d, também dados pelo enunciado da questão. Dessa forma,

$$(r_N)^2 + d^2 = L^2 \iff r_N = \sqrt{L^2 - d^2} = \sqrt{(10,14 \cdot 10^{-11})^2 - (9,40 \cdot 10^{-11})^2}$$
$$\therefore r_N \approx 3,80 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Por fim,

$$\vec{r}_{NH_3} = \frac{13,9}{16,9} \cdot r_N \hat{j} \approx 3,13 \cdot 10^{-11} \, \hat{j} \text{ m}$$

Isso significa que, dado o sistema de coordenadas escolhido no início da solução, a coordenada x do centro de massa é $x = 0$ m, enquanto que a coordenada y do centro de massa é $y = 3,13 \cdot 10^{-11}$ m.

(b) Resposta e desenvolvimento para esse item dados nos parágrafos anteriores. $y = 3,13 \cdot 10^{-11}$ m.

Questão 4

Uma mola de constante elástica k e massa desprezível possui uma de suas pontas conectada a um bloco de massa M e a outra ponta está fixada a uma parede. O sistema está inicialmente em equilíbrio e a superfície não possui atrito. Uma bala de massa m_b é disparada em direção ao bloco com uma velocidade v_b.

(a) Assumindo que a bala atinge o repouso dentro do bloco, qual a velocidade do sistema bala-bloco após a bala atingir o repouso e qual a distância percorrida pelo sistema quando ele atinge o repouso pela primeira vez? Considere que o tempo que a bala demora para atingir o repouso dentro do bloco é desprezível.

(b) Agora assuma que a bala consiga atravessar o bloco e saia dele com uma velocidade $v_b/2$. Desprezando o tempo que a bala demora para atravessar o bloco, encontre a velocidade do bloco quando ele começa a se mover e a distância percorrida por ele até atingir o repouso pela primeira vez.

Solução:

(a) Sabendo que o tempo que a bala demora para atingir o repouso dentro do bloco é desprezível e que não há forças externas na horizontal, podemos considerar que o momento linear total do sistema imediatamente antes da colisão da bala com o bloco e imediatamente depois é conservado. Dessa forma, podemos escrever

$$m_b \cdot v_b = (m_b + M)v' \iff v' = \frac{m_b}{(m_b + M)} v_b$$

onde v' é a velocidade do sistema bala-bloco após a bala atingir o repouso.

Além disso, como não há menção a forças dissipativas, podemos dizer que a energia cinética total do sistema bala-bloco inicial é totalmente convertida em energia potencial elástica da mola (relativo à deformação máxima). Assim, é verdade que

$$\frac{1}{2}(m_b + M)v'^2 = \frac{1}{2}kx^2 \iff x = v'\sqrt{\frac{(m_b + M)}{k}} = m_b v_b \sqrt{\frac{1}{k(m_b + M)}}$$

onde x é a distância percorrida pelo sistema bala-bloco quando ele chega ao repouso pela primeira vez. O que ocorre é que após a colisão da bala com o bloco, estes deformam a mola até que finalmente atinjam o repouso, que é o que nos permite escrever a equação de conservação de energia dessa forma.

(b) Imaginando que a bala consiga atravessar o bloco e sair dele com velocidade $v_b/2$, e sabendo que o tempo que a bala demora para atravessar o bloco é desprezível, podemos dizer que o momento linear total do sistema é conservado e a equação fica da forma

$$m_b v_b = m_b \frac{v_b}{2} + MV \iff V = \frac{m_b v_b}{2M}$$

onde V é a velocidade instantânea que o bloco adquire após a bala abandoná-lo. Além disso, nesse momento, o bloco começará a deformar a mola até que atinja o repouso, mais uma vez nos permitindo escrever a seguinte equação para a conservação da energia mecânica do sistema:

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}kx^2 \iff x = V\sqrt{\frac{M}{k}} = \frac{m_b v_b}{2}\sqrt{\frac{1}{Mk}}$$

onde x é a distância percorrida pelo bloco até atingir o repouso pela primeira vez.

Questão 5

Uma bala de 5,20 g que se move a 672 m/s atinge um bloco de madeira de 700 g inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito. A bala atravessa o bloco e sai do outro lado com velocidade reduzida para 428 m/s.

(a) Qual a velocidade final do bloco?

(b) Qual a velocidade do centro de massa do sistema bala-bloco?

Solução:

(a) Como não há forças externas na horizontal e considerando que o tempo que a bala atravessa o bloco de madeira é desprezível, podemos dizer que o momento linear do sistema se conserva e, então,

$$m_b v_b = m_b v_b' + MV \iff V = \frac{m_b(v_b - v_b')}{M} = \frac{0,00520 \cdot (672 - 428)}{0,7} \approx 1,81 \text{ m/s}$$

(b) Colocando o referencial no bloco após a bala atravessá-lo, a coordenada do centro de massa admitindo que não há movimento na vertical é dada por

$$r_{CM} = \frac{M\cancelto{0}{r_B} + m_b r_b''}{(M + m_b)} = \frac{m_b r_b'}{(M + m_b)}$$

Derivando dos dois lados em relação ao tempo, temos

$$v_{CM} = \frac{m_b}{(M + m_b)} v_b''$$

onde v_b'' é a velocidade da bala em relação ao bloco depois de atravessá-lo, isto é, $v_b'' = v_b' - V = 428 - 1,81 \approx 426$ m/s. Assim,

$$v_{CM} = \frac{0,00520}{(0,7 + 0,00520)} \cdot 426 \approx 3,1426 \text{ m/s} \approx \pi \text{ m/s}$$

Questão 6

Considere um foguete que está no espaço sideral em repouso em relação a um referencial inercial. O motor do foguete deve ser acionado por um certo intervalo de tempo. Determine a razão de massa do foguete (razão entre as massas final e inicial) nesse intervalo para que a rapidez original do foguete em relação ao referencial inercial seja igual:

(a) à rapidez de exaustão (rapidez dos produtos de exaustão em relação ao foguete);

(b) à duas vezes a rapidez de exaustão.

Solução:

(a) Considere um referencial em que o foguete coincide com o eixo horizontal x. Chamaremos a massa inicial do foguete de M_0, a massa do foguete em um instante qualquer de $M(t)$, o módulo da velocidade de exaustão em relação ao foguete de $V_E = -(\nu - V)$ onde ν é a velocidade de exaustão em relação ao referencial mencionado no início e V a velocidade do foguete em relação ao mesmo referencial. Adotando uma convenção onde $V > 0$ e $\nu < 0$, temos que $V_E > 0$ (o que era de se esperar porque é um módulo). Devemos considerar também que a velocidade de exaustão $V_E = constante$, uma vez que não há dados que permitam afirmar o contrário.

Além disso, sabendo que não há a atuação de forças externas na horizontal, o momento linear total do sistema deve ser conservado nessa direção, o que nos permite afirmar que

$$P(t + \Delta t) = P(t) \iff (M(t) - dm)V(t + \Delta t) + \nu dm = M(t)V(t)$$

Reescrevendo,

$$M(t)(V(t + \Delta t) - V(t)) + dm(\nu - V(t + \Delta t)) = 0$$

Dividindo por Δt de ambos os lados e aplicando o limite $\Delta t \to 0$ temos

$$M(t)\frac{dV}{dt} + (\nu - V(t))\frac{dm}{dt} = 0 \iff -\frac{dm}{M(t)} = \frac{dV}{(\nu - V(t))} = -\frac{dV}{V_E}$$

$$\iff -\int_{M_0}^{M_f} \frac{dM}{M(t)} = \frac{1}{V_E}\int_0^{V_f} dV \implies V_f = V_E \cdot \ln \frac{M_0}{M_f}$$

$$\iff \frac{M_f}{M_0} = e^{-\dfrac{V_f}{V_E}}$$

Queremos que $V_f = V_E$, então

$$\frac{M_f}{M_0} = \frac{1}{e}$$

(b) Da equação encontrada para a razão entre a massa final e inicial do foguete no item (a), temos, para $V_f = 2V_E$

$$\frac{M_f}{M_0} = \frac{1}{e^2}$$

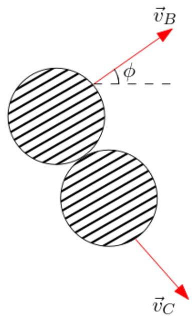
Questão 7

Considere a seguinte reação nuclear:

$$A + A \to B + C$$

onde duas partículas A idênticas, de massa m, colidem e tem como produto dessa reação uma partícula B, de massa $\frac{3}{2}m$, e uma partícula C, de massa $\frac{1}{2}m$. Além disso, a reação pode resultar em uma diferença de energia Q entre a energia cinética final e inicial $Q = K_f - K_i$. Adotando o referencial do laboratório tal que uma partícula A está em repouso e a outra colide com ela com uma velocidade v e a partícula B é emitida com um ângulo ϕ em relação ao vetor velocidade $\vec{v}$. Já no referencial do centro de massa, o ângulo de espalhamento da partícula B é θ, em relação a $\vec{v}$. Determine uma expressão para Q em termos de ν, θ e ϕ.

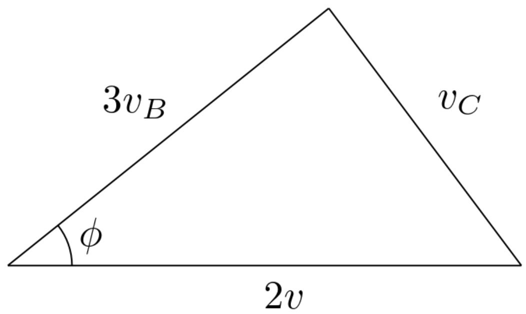
Solução: Em primeiro lugar, é necessário tratar o sistema antes e depois da reação nuclear no referencial do laboratório. Para tanto, utilizaremos do fato de que nesse referencial a velocidade de B é $\vec{v}_B$ que faz um ângulo ϕ em relação ao vetor velocidade $\vec{v}$ e a velocidade de C é $\vec{v}_C$. Também, consideraremos que $m_B = \frac{3}{2}m$, $m_C = \frac{1}{2}m$ e que nesse referencial a velocidade do centro de massa é dada por $\nu_{CM} = \frac{m\nu}{2m} = \frac{\nu}{2}$ constante por conta da ausência de força externa resultante. Observe a ilustração a seguir que representa a situação do sistema imediatamente antes e imediatamente depois da reação nuclear, com as devidas notações.



Conservando o momento linear, uma vez que não há força externa resultante, temos

$$m\vec{v} = \frac{3}{2}m\vec{v}_B + \frac{1}{2}m\vec{v}_c \implies 2\vec{v} = 3\vec{v}_B + \vec{v}_C$$

Como o momento linear é conservado, os vetores da última equação devem formar um triângulo e valerá a lei dos cossenos:



$$v_C^2 = 3v_B^2 + 2v^2 - 12vv_B\cos\phi$$

Além disso, $Q = K_f - K_i$ nesse referencial é calculado por

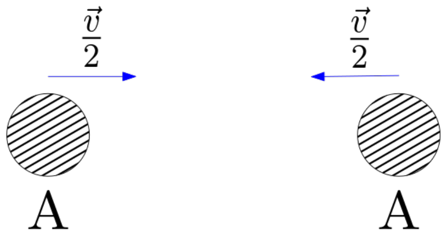
$$K_f - K_i = \left(\frac{3}{4}mv_B^2 + \frac{1}{4}mv_C^2\right) - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m}{4}(3v_B^2 + v_C^2 - 2v^2)$$

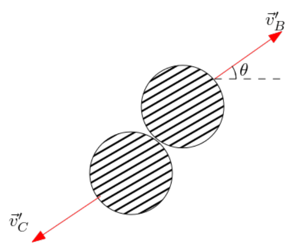
Indo além, analisando dessa vez o referencial coincidente com o centro de massa do sistema e mantendo o mesmo padrão de notações, temos que antes da reação nuclear a velocidade de cada componente A era:

$$v_{A_1} = v - v_{CM} = v - \frac{v}{2} = \frac{v}{2}$$
$$v_{A_2} = 0 - v_{CM} = 0 - \frac{v}{2} = -\frac{v}{2}$$

Ou seja, os dois componentes A possuem velocidades de mesma magnitude e direção, porém sentidos contrários, o que era de se esperar posto que o centro de massa deve se localizar exatamente no meio dos dois componentes (porque possuem mesma massa) e deve se manter na mesma posição o tempo inteiro (porque parte do repouso e não há a atuação de forças externas).

Procurando uma maior clareza visual, a seguir há uma ilustração do sistema antes e depois da reação nuclear no referencial do centro de massa:





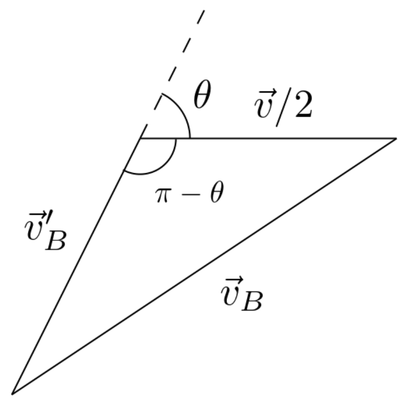
Podemos perceber que antes da reação o momento linear total do sistema era zero (porque temos dois componentes de massa massa e velocidades iguais em magnitude porém contrárias em sentido). Esse momento deve ser conservado para os produtos da reação assim como a posição inalterada do centro de massa, uma vez que há a ausência de força externa resultante. Portanto,

$$\frac{3}{2}m\vec{v}'_B + \frac{1}{2}m\vec{v}'_C = 0 \iff 3\vec{v}'_B = -\vec{v}'_C \iff v'^2_C = 9 \cdot v'^2_B$$

Além disso, relacionando os vetores no referencial do centro de massa com os vetores no referencial do laboratório,

$$\vec{v}'_B = \vec{v}_B - \vec{v}_{CM} = \vec{v}_B - \frac{\vec{v}}{2}$$

O que nos permite mais uma vez utilizar a lei dos cossenos porque esses vetores devem formar um triângulo, isto é



$$v_B^2 = \frac{v^2}{4} + v_B'^2 + v v_B' \cos\theta \iff v_B'^2 + v v_B' \cos\theta + \left(\frac{v^2}{4} - v_B^2\right) = 0$$

Cuja solução obtida através da fórmula de Bhaskara para v_B' com significado físico ($v_B' > 0$) implica que

$$v_B'^2 = \frac{1}{4}\left(v^2 + 4v_B^2 - 2v\cos\theta\sqrt{v^2\sin^2\theta + 4v_B^2}\right)$$

Já a quantidade $Q = K_f - K_i$ nesse referencial será

$$K_f - K_i = \left(\frac{3}{4}mv_B'^2 + \frac{1}{2}mv_C'^2\right) - \frac{1}{4}mv^2 = \frac{m}{4}(3v_B'^2 + v_C'^2 - v^2)$$

Mas Q não varia diante de uma mudança de referencial, então o Q encontrado no referencial do laboratório deve ser igual ao Q encontrado no referencial do centro de massa, portanto

$$\frac{m}{4}(3v_B^2 + v_C^2 - 2v^2) = \frac{m}{4}(3v_B'^2 + v_C'^2 - v^2) \iff 3(v_B'^2 - v_B^2) + (v_C'^2 - v_C^2) + v^2 = 0$$

Entretanto, sabe-se através dos cálculos anteriores que

$$v_B'^2 = \frac{1}{4}\left(v^2 + 4v_B^2 - 2v\cos\theta\sqrt{v^2\sin^2\theta + 4v_B^2}\right)$$
$$v_C'^2 = 9v_B'^2$$
$$v_C^2 = 3v_B^2 + 2v^2 - 12vv_B\cos\phi$$

Portanto podemos substituir essas três informações na equação $3(v_B'^2 - v_B^2) + (v_C'^2 - v_C^2) + v^2 = 0$ e obter v_B em função de v, θ e ϕ, cuja simplificação é

$$v_B^2 = \frac{v^2 \sin^2\theta \cos^2\theta}{4(\cos^2\phi - \cos^2\theta)}$$

Portanto, como $Q = \frac{m}{4}(3v_B^2 + v_C^2 - 2v^2)$ e possuímos v_B e v_C em função de v, então, mais uma vez, substituindo essas informações na equação para Q, no referencial do laboratório, encontramos

$$Q = \frac{mv^2}{4}\left[\frac{3(\sin\theta\cos\theta)^2}{\cos^2\phi - \cos^2\theta} + 2\right]$$

Questão 8

Uma bala de massa m e velocidade v atravessa um pêndulo de massa M com um fio de comprimento l conforme mostra a figura 4. O pêndulo está inicialmente em repouso e após atravessá-lo a bala sai com uma velocidade $\frac{v}{3}$. Qual deve ser a velocidade mínima da bala para que o pêndulo complete uma volta ao longo do círculo?

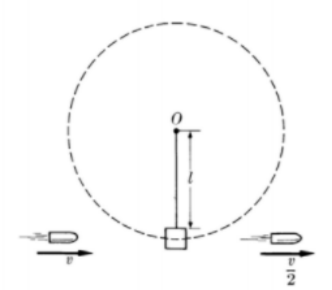


Figura 4: Sistema do exercício 8.

Solução: Uma vez que não há forças externas atuando na direção horizontal, o momento linear total do sistema deve ser conservado imediatamente antes da bala colidir com o pêndulo e imediatamente depois de atravessá-lo. Assim,

$$mv = m\frac{v}{3} + MV \iff V = \frac{2mv}{3M}$$

onde V é a velocidade do pêndulo imediatamente depois da colisão.

Além disso, para que o pêndulo consiga dar uma volta completa e analisando a velocidade mínima da bala para que isso ocorra, a resultante centrípeta no topo do trajetória ser igual à força peso atuando no pêndulo (porque T = 0 é o caso limite) é uma condição necessária e suficiente, ou seja

$$\frac{MV'^2}{l} = Mg \iff V' = \sqrt{gl}$$

onde V' é a velocidade mínima do pêndulo no ponto mais alto para conseguir passá-lo e prosseguir para finalizar uma volta. Por conservação de energia para o pêndulo, temos

$$\frac{1}{2}MV^2 = Mg(2l) + \frac{1}{2}MV'^2 \iff V^2 = 4gl + gl = 5gl$$

Assim, como sabemos que $V = \frac{2mv}{3M}$, temos

$$V = \frac{2mv}{3M} = \sqrt{5gl} \iff v = \frac{3M}{2m}\sqrt{5gl}$$

IFUSP
Instituto de Física da USP

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

FÍSICA I - 4302111
PROFA. DRA. VALENTINA MARTELLI

LISTA DE PROBLEMAS VI

VICTOR HUGO DOS SANTOS LINS

Email: victorlins@usp.br

19 DE JULHO DE 2021

Questão 1

Um disco uniforme de massa M e raio R está rotacionando livremente ao longo do eixo vertical com uma velocidade angular inicial ω_0. Em seguida, areia é despejada a uma taxa constante μ no disco formando um filete bem fino de raio r_0 ($r_0 < R$).

(a) Qual a aceleração angular do sistema enquanto a areia está sendo despejada?

(b) Qual a taxa de variação da energia cinética rotacional do sistema com o tempo? Após quanto tempo a energia cinética rotacional do sistema é reduzida para metade do seu valor inicial?

Solução:

(a) Antes do primeiro grão de areia ter sido depositado no disco, o seu momento angular era

$$\int L_0 = I_0 \omega_0 = \frac{MR^2}{2} \cdot \omega_0$$

É necessário que o momento angular seja conservado durante a deposição da areia no disco, uma vez que não há torque externo resultante diferente de zero. Em $t > 0$, o sistema será constituído pelo disco de massa M e raio R juntamente com o filete de areia de raio r_0 e massa $m(t) = \mu t$, cujo momento de inércia resultante será a combinação de um disco com um anel, ou seja

$$I = I_0 + I_{areia} = \frac{MR^2}{2} + \mu t r_0^2$$

E o momento angular será constante e igual a L_0 a todo instante. Isso significa que conforme o momento de inércia é incrementado, há uma diminuição na velocidade angular. Como $\tau = \frac{dL}{dt}$ e nesse caso podemos dizer que $L = I\omega$, então

$$\tau = 0 = \frac{dL}{dt} = \frac{dI}{dt}\omega + I\frac{d\omega}{dt} = \mu r_0^2 \omega + I\alpha \implies \alpha = -\frac{\mu r_0^2 \omega}{I}$$

Pela conservação do momento angular, sabe-se que $\omega = \dfrac{I_0 \omega_0}{I}$, então

$$\alpha = -\frac{\mu I_0 \omega_0 r_0^2}{I^2}$$

onde $I = \dfrac{MR^2}{2} + \mu t r_0^2$, nos permite afirmar que com o passar do tempo a desaceleração se torna cada vez mais intensa, a adição da areia ao sistema fará o disco eventualmente parar de rotacionar.

(b) Sabendo que a energia cinética rotacional é dada num instante qualquer por $K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$, então

$$\frac{dK_{rot}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dI}{dt}\omega^2 + 2I\omega\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(\mu r_0^2\omega^2 + 2I\omega\alpha\right)$$

Entretanto conhecemos $\omega = \frac{I_0\omega_0}{I}$, $\alpha = -\frac{\mu I_0\omega_0 r_0^2}{I^2}$, e também $I = \frac{MR^2}{2} + \mu t r_0^2$, portanto a taxa de variação da energia cinética rotacional do sistema com o tempo está completamente determinada.

Além disso, reconhecendo que $K(t) = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{(I_0\omega_0)^2}{2I}$ onde $I = \frac{1}{2}MR^2 + \mu t r_0^2$, temos

$$K(t) = \frac{(I_0\omega_0)^2}{MR^2 + 2\mu t r_0^2}$$

Queremos que $K(t) = \frac{1}{2}K_0 = \frac{1}{4}I_0\omega_0^2$, então

$$\frac{1}{4}I_0\omega_0^2 = \frac{(I_0\omega_0)^2}{MR^2 + 2\mu t r_0^2}$$

$$\implies t = \frac{MR^2}{2\mu r_0^2}$$

Questão 2

Uma arruela de aço com momento de inércia I_0 é montada no eixo de um motor. Após a arruela atingir uma aceleração angular ω_0, o motor é desligado e a arruela começa a desacelerar até atingir uma velocidade angular ω_1 no instante t_1. Neste momento, uma segunda arruela com momento de inércia I_1 é colocada sobre a primeira e demora um tempo τ até começar a se moverem sincronamente. Após isso, elas levam um tempo τ' desacelerando até enfim pararem.
Considere que o eixo do motor exerce um torque friccional constante durante todo o processo e independente da velocidade. Forneça as respostas dos seguintes itens em termos apenas das constantes fornecidas no enunciado.

(a) Qual a aceleração angular da primeira arruela após o motor ser desligado e antes de colidir com a segunda arruela?

(b) Qual o impulso angular durante o processo de colisão entre a primeira e a segunda arruela?

(c) Qual a velocidade angular das duas arruelas imediatamente após elas começarem a se mover juntas?

(d) Qual a aceleração angular das arruelas após o fim do processo de colisão?

Solução:

(a) Por definição, a aceleração angular média α é dada por

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t_1}$$

(b) Sabendo a aceleração angular α, podemos afirmar que o torque friccional foi de $I_0\alpha$, e ele terá esse mesmo valor durante todo o processo, como afirmado no enunciado. O impulso angular é dado pelo produto entre o torque aplicado e o intervalo de tempo em que é aplicado. Considerando que o "processo de colisão" é o que ocorre durante o tempo τ mencionado, então

$$I_0 \cdot \alpha \cdot \tau$$

é o impulso angular desejado.

(c) Retomamos que o impulso angular é igual à diferença de momento angular, o que nos permite escrever que

$$I_0\alpha\tau = \Delta L = I_f\omega_f - I_0\omega_1$$

Onde $I_f = (I_0 + I_1)$ é o momento de inércia do sistema composto pelas duas arruelas e ω_f é a velocidade adquirida pelo conjunto quando estão sincronizadas as arruelas. Portanto,

$$\omega_f = \frac{I_0}{(I_0 + I_1)} \cdot (\omega_1 + \alpha\tau)$$

(d) Uma vez que o torque friccional é constante, então é imediato que

$$I_0\alpha = I_f\gamma$$

onde γ é a aceleração angular do conjunto de arruelas ao fim do processo de colisão. Dessa forma,

$$\gamma = \frac{I_0}{I_0 + I_1}\alpha$$

Questão 3

Considere um disco em queda devido ao efeito da gravidade como na Figura 1. O disco apresenta uma massa M, momento de inércia I e além da velocidade de queda, apresenta uma velocidade angular ω.

(a) Qual é o torque que a gravidade exerce sobre o disco em relação a um ponto sobre a linha vertical sólida?

(b) Para qual velocidade v o momento angular do disco em relação a um ponto na linha sólida é nulo?

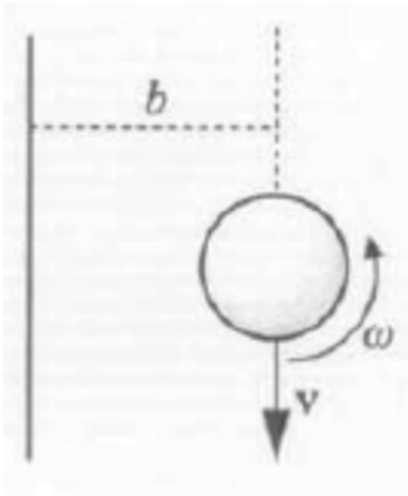


Figura 1: Sistema do exercício 3.

Solução:

(a) Tomando um ponto Ω qualquer da linha sólida e sendo $\mathbf{r}$ o vetor posição do centro de massa do disco em relação a Ω, temos que o torque do peso por definição é dado por:

$$\tau_{\mathbf{P}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F_P} = -Mgb\hat{k}$$

onde o sinal negativo aparece porque convenciono que $\hat{k}$ é positivo para fora do plano e pela regra da mão direita percebemos que o torque é para dentro.

(b) O disco apresenta dois tipos de movimento: uma rotação em torno de um eixo normal ao plano da Figura 1 e que passa pelo seu centro de massa, e uma translação com respeito a um ponto na linha sólida. Portanto, o seu momento angular é dado por

$$\mathbf{L} = I\omega\hat{k} + \mathbf{r_{CM}} \times M\mathbf{v} = (I\omega - Mbv)\hat{k}$$

O momento angular será nulo quando o termo dentro do parênteses zerar, isto é

$$I\omega = Mbv \iff v = \frac{I\omega}{Mb}$$

e esta é a velocidade que desejávamos encontrar.

Questão 4

Uma esfera oca de raio $0,20$ m possui momento de inércia $I = 0,060$ kgm^2 sobre uma linha que passa através de seu centro de massa. A esfera rola sem escorregar em uma superfície inclinada em 45° em relação à horizontal. Na posição inicial, a energia cinética total da esfera é de 17 J. Responda:

(a) Quanto dessa energia cinética inicial é rotacional?

(b) Qual é a velocidade do centro de massa da esfera na posição inicial?

(c) Quando a esfera se move $1,0$ m acima da inclinação de sua posição inicial, qual é o valor da energia cinética total e da velocidade de seu centro de massa?

Solução:

(a) Sabendo que a esfera rola sem escorregar, podemos dizer que $v = \omega r$. De forma geral, a energia cinética da esfera pode ser escrita como a soma da energia cinética relacionada à translação do seu centro de massa com a energia cinética da sua rotação em torno do eixo normal ao plano que passa pelo seu centro de massa, ou seja

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Usando $v = \omega r$,

$$K = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Como se trata de uma esfera oca, seu momento de inércia é $I = \frac{2}{3}mr^2$, então

$$K = \frac{3}{4}I\omega^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{5}{4}I\omega^2$$

Sabendo que $K = 17$ J e $I = 0,060$ kg $\cdot$ m^2, temos

$$\omega^2 = \frac{4E}{5I} \approx 226,6\ \mathrm{s}^{-2}$$

Já que a energia cinética rotacional é $\frac{1}{2}I\omega^2$ então substituindo o valor calculado para ω^2, encontramos

$$K_{rot} \approx 6,8\ \mathrm{J}$$

(b) Uma vez que conhecemos a energia cinética total (17 J) e sabemos qual parcela desse total se dedica exclusivamente à energia cinética rotacional, para saber quanto resta de energia cinética associada à translação do centro de massa basta calcular a diferença, isto é

$$K_{CM} = K - K_{rot} = 10,2\ \mathrm{J}$$

Mas, por definição, $K_{CM} = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 \iff v_{CM} = \sqrt{\frac{2K_{CM}}{m}}$. Sua massa pode ser encontrada através do momento de inércia $I = \frac{2}{3}mr^2 = 0,060\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$ posto que sabemos seu raio $r = 0,20\ \mathrm{m}$, isto é $m = \frac{3I}{2r^2} = 2,25\ \mathrm{kg}$. Portanto,

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2K_{CM}}{m}} \approx 3,0\ \mathrm{m/s}$$

(c) Uma vez que não foi disponibilizado uma desenho do sistema, assumirei que os *"1,0 m acima da inclinação de sua posição inicial"* mencionados no enunciado signifique que a esfera rola 1,0 m *ao longo* da superfície inclinada em sentido ascendente. Pelo teorema da energia cinética, a variação da energia cinética da esfera é igual ao trabalho da força resultante que atua na mesma. Como não há atrito e sabendo que a componente do peso perpendicular ao plano inclinado se anula com a força Normal, a força resultante atuando na esfera é a componente do peso ao longo da superfície inclinada, isto é $P_x = mg \sin 45°$. Dessa forma,

$$W_{P_x} = \Delta K \implies \mathbf{P_x} \cdot \mathbf{d} = -mg \sin 45° \cdot 1 = \Delta K \therefore \Delta K = -2,25 \cdot 9,8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -15,6\ \mathrm{J}$$

onde o sinal negativo aparece pois a força $\mathbf{P_x}$ é contrária à direção do deslocamento da esfera, que é ascendente. Portanto, a energia cinética total após esse deslocamento de 1,0 m ao longo da superfície inclinada será de $1,4\ \mathrm{J}$, que é a diferença da energia que a esfera possuía no início (17 J) com o quanto ela perdeu (15, 6 J).

$$K' = 1,4\ \mathrm{J}$$

Já a velocidade do seu centro de massa pode ser obtida mais uma vez considerando a energia cinética total do sistema como a soma da sua energia cinética rotacional com a translacional, e efetuando a substituição $\omega = \frac{v}{r}$ para obter uma expressão em função da velocidade, isto é

$$K' = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}I\omega'^2 = \frac{v'^2}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)$$

Retomando que $I = \frac{2}{3}mr^2$, então

$$v'^2 = \frac{6K'}{5m} \implies v' \approx 0,86 \text{ m/s}$$

Questão 5

Um dipolo elétrico é um par de cargas iguais e opostas, $+q$ e $-q$, separadas por uma distância d. O *momento de dipolo elétrico* $\mathbf{p}$ *associado ao dipolo* é o vetor $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ onde $|\mathbf{d}| = d$ e $\mathbf{d}$ aponta de $-q$ para $+q$ (Figura). Considere um dipolo elétrico situado num campo elétrico $\mathbf{E}$ uniforme.

(a) Mostre que a resultante das forças elétricas aplicadas ao dipolo é nula, mas que o torque resultante é dado por

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

(em relação a qualquer ponto).

(b) Mostre que a energia potencial do dipolo no campo é dada por

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

Identifique as situações de equilíbrio estável e instável do dipolo no campo.

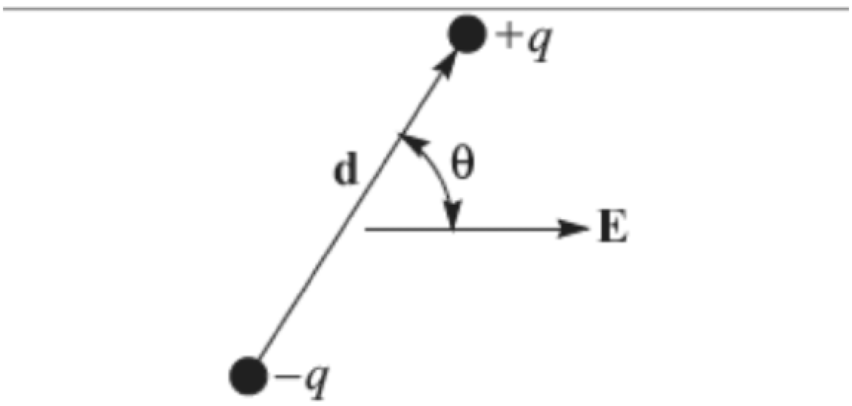


Figura 2: Sistema do exercício 5.

Solução:

(a) O módulo da força elétrica entre duas cargas é dada pela lei de Coulomb $F_e = \dfrac{kq^2}{d^2}$, que satisfaz a terceira lei de Newton e portanto constitui um par de ação e reação, cuja soma vetorial é nula. Além disso, devido à existência do campo elétrico uniforme $\mathbf{E}$, existirá uma força elétrica $\mathbf{F}_+ = q\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}_- = -q\mathbf{E}$ atuando nas cargas $+q$ e $-q$, respectivamente, cuja soma vetorial também é nula. Portanto, a resultante das forças elétricas aplicadas ao dipolo é nula.

Para avaliar o torque, primeiro tomemos um referencial $\mathbb{R}$ qualquer no espaço. Seja Ω um ponto arbitrário do espaço, com posição $\mathbf{r}_\Omega$ em relação ao referencial $\mathbb{R}$. Considerando a posição da carga $+q$ como $\mathbf{r_1}$ e a da carga $-q$ como $\mathbf{r_2}$ também em relação à $\mathbb{R}$, o torque τ aplicado ao dipolo e com respeito à Ω é

$$
\begin{aligned}
\tau &= (\mathbf{r_1} - \mathbf{r_0}) \times (q\mathbf{E}) + (\mathbf{r_2} - \mathbf{r_0}) \times (-q\mathbf{E}) \\
&= q(\mathbf{r_1} \times \mathbf{E}) - q(\mathbf{r_2} \times \mathbf{E}) + q(\cancel{\mathbf{r_0} \times \mathbf{E}} - \cancel{\mathbf{r_0} \times \mathbf{E}}) \\
&= q(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) \times \mathbf{E} = q\mathbf{d} \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}
\end{aligned}
$$

Como queríamos demonstrar.

(b) Sabemos que uma quantidade infinitesimal de trabalho dW devido ao torque τ é $dW = \tau \cdot d\theta$ onde $d\theta$ é a variação angular infinitesimal. Também, pela natureza conservativa da força elétrica, podemos dizer que $dU = -\,dW \implies dU = -\tau \cdot d\theta$. Integrando essa relação dos dois lados,

$$\int dU = -\int \tau \cdot d\theta$$

Usando o torque calculado no item (a), temos que

$$U = -\int \tau \cdot d\theta = -\int (\mathbf{p} \times \mathbf{E}) \cdot d\theta = -\int -pE \sin\theta \, d\theta = -pE \cos\theta + C$$

Adotando que para $\theta = 90°$ teremos $C = 0$, a expressão reduz-se para

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

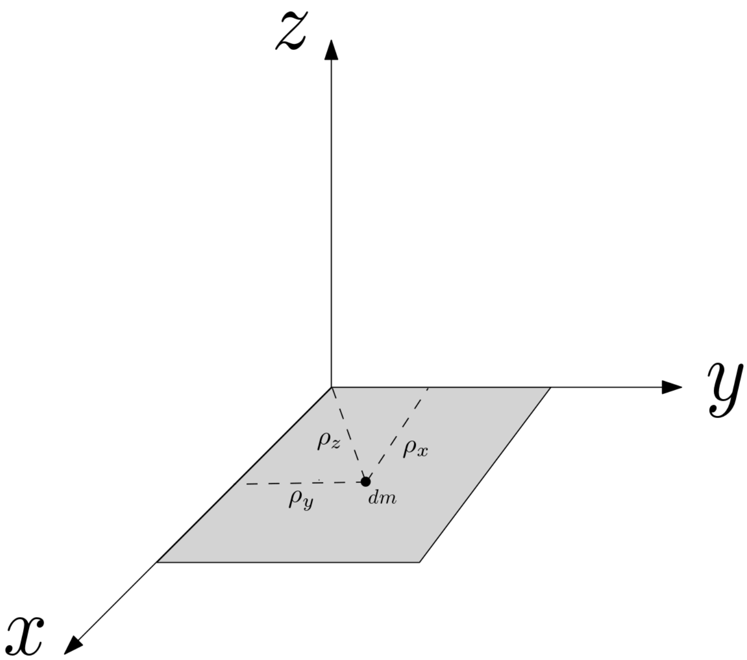
Como queríamos demonstrar.

No que se refere a situação de equilíbrio estável, sabemos que isso ocorre quando há um mínimo de energia potencial. Sabendo que $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$, isso ocorrerá quando o produto escalar for igual a 1, isto é, quando o vetor $\mathbf{p}$ for paralelo ao vetor $\mathbf{E}$, ou seja, quando o dipolo estiver na horizontal com a carga negativa à esquerda e a carga positiva à direita, uma vez que a expressão para U já carrega um sinal negativo consigo. Já em relação ao equilíbrio instável, isso ocorre quando há um máximo de energia potencial, ou seja, quando o produto escalar for igual a -1, o que significa que os vetores estão antiparalelos (dipolo na horizontal com carga negativa à direita e positiva à esquerda), o dipolo é espelhado em relação ao caso de equilíbrio estável.

Questão 6

Demonstre o seguinte teorema dos eixos perpendiculares: o momento de inércia de uma placa (lâmina delgada) plana de forma arbitrária em relação a um eixo Oz perpendicular a seu plano, com a origem O no plano da placa, é a soma dos momentos de inércia da placa em relação aos eixos Ox e Oy que formam com Oz um sistema de eixos ortogonais.

Solução: A demonstração desse teorema dos eixos perpendiculares se dá por uma justificativa geométrica, portanto disponibilizo uma ilustração do sistema para facilitar a dissertação:



A tripla de eixos x, y, z indicada representam os eixos de rotação a que vamos calcular os momentos de inércia. Além disso, a interseção entre os três eixos é a origem do sistema de coordenadas, o que nos permitirá descrever sem ambiguidade as grandezas ρ_x, ρ_y e ρ_z — as distâncias perpendiculares entre a partícula de massa infinitesimal dm e os respectivos eixos de rotação.

Note que, pela definição de momento de inércia, sendo $I_\alpha = \int \rho_\alpha^2 \, dm$ o momento de inércia relativo ao eixo α, temos

$$I_x = \int \rho_x^2 \, dm \,, \quad I_y = \int \rho_y^2 \, dm \,, \quad I_z = \int \rho_z^2 \, dm$$

Mas, como os três eixos são mutuamente perpendiculares, pela geometria do problema podemos utilizar o teorema de pitágoras para afirmar que

$$\rho_z^2 = \rho_x^2 + \rho_y^2$$

E então segue que

$$I_z = \int \rho_z^2 \, dm = \int (\rho_x^2 + \rho_y^2) \, dm = \int \rho_x^2 \, dm + \int \rho_y^2 \, dm = I_x + I_y$$

Como queríamos demonstrar.

Questão 7

Uma partícula de massa m inicialmente com uma energia E, viaja livremente até se aproximar de um núcleo atômico. A partícula é afetada pelo núcleo devido a um potencial central $V(r)$, onde r é a distância entre o núcleo e partícula. Suponha que $V(r) = 0$ se $r > r_0$. Considere que a partícula possui um parâmetro de impacto b. O parâmetro de impacto, aqui, é definido como a distância perpendicular entre o vetor velocidade inicial da partícula e o centro do núcleo. Após a partícula ter interagido com o núcleo e ela estiver a uma distância $r > r_0$ deste, o vetor velocidade final fará um angulo θ com o vetor velocidade inicial. Considere o centro de coordenadas no núcleo, e que o plano formado pelos eixos x,y contenha o vetor velocidade inicial da particula.
*Considere sempre o momento angular em relação ao eixo de rotação que passa pelo núcleo e é perpendicular ao eixo xy.

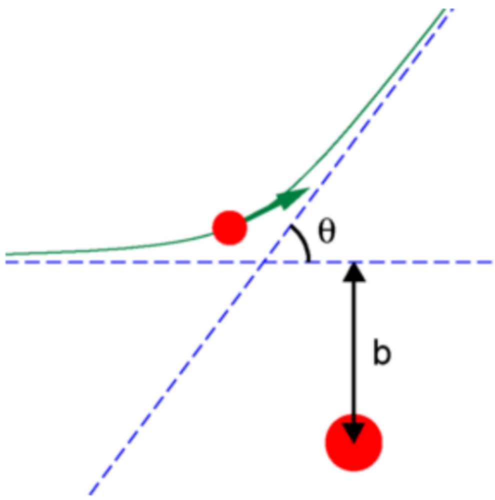


Figura 3: Sistema do exercício 7

(a) Qual é o módulo do momento angular da partícula, logo antes da partícula começar a interagir com o núcleo?

(b) Seja ϕ o ângulo que o vetor velocidade faz com o vetor posição exatamente no instante em que a partícula para de interagir com o núcleo. Determine $\sin\phi$ em termos de θ.

(c) Determine o módulo do momento angular no instante em que a partícula para de interagir com o núcleo em termos de ϕ, r_0, m e o módulo da velocidade da partícula neste instante.

(d) Determine qual é o módulo da velocidade da partícula no instante em que a partícula para de interagir com o núcleo.

(e) Determine $\sin\phi$ em termos de $E, V(r_0), r_0, b, m$.

Solução:

(a) Antes da partícula começar a interagir com o núcleo o seu potencial era nulo, então toda a sua energia era cinética. Nesse caso,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \iff v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

é a velocidade imediatamente antes da partícula começar a interagir com o núcleo. Por definição, seu momento angular é dado por

$$\mathbf{L_0} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição da partícula em relação ao núcleo e $\mathbf{p}$ o momento linear da partícula em relação ao núcleo. Dessa forma,

$$L_0 = b\sqrt{2Em}$$

é o módulo do momento angular da partícula, onde utilizei que a distância perpendicular entre o núcleo e o vetor $\mathbf{p}$ é a distância b indicada na Figura 3.

(b) Sendo $\mathbf{r}'$ o vetor posição da partícula exatamente no instante em que para de interagir com o núcleo, reconhecendo que $|\mathbf{r}'| = r_0$ uma vez que é a partir dessa distância que a partícula para de interagir com o núcleo, e sendo $\mathbf{v}'$ a nova velocidade da partícula, temos

$$\mathbf{L_0} = \mathbf{L}'$$

isto é, o momento angular do sistema é conservado entre o instante imediatamente antes da partícula interagir com o núcleo e imediatamente depois de parar, uma vez que a única força atuando na partícula é central e não realiza torque. Dessa forma,

$$b\sqrt{2Em} = r_0 m v' \sin\phi$$

Note também que $v' = \sqrt{\frac{2E}{m}}$, isto é, a energia cinética do sistema também é conservada, uma vez que forças centrais são conservativas e nos instantes de referência não há energia potencial ($r > r_0$). Assim,

$$b\sqrt{2Em} = r_0 m \sqrt{\frac{2E}{m}} \sin\phi$$

$$\implies \sin\phi = \frac{b}{r_0}$$

(c) O módulo do momento angular imediatamente após a partícula parar de interagir com o núcleo, por definição, é igual a

$$\mathbf{L}' = \mathbf{r}' \times \mathbf{p}' \implies L' = mr_0 v' \sin\phi$$

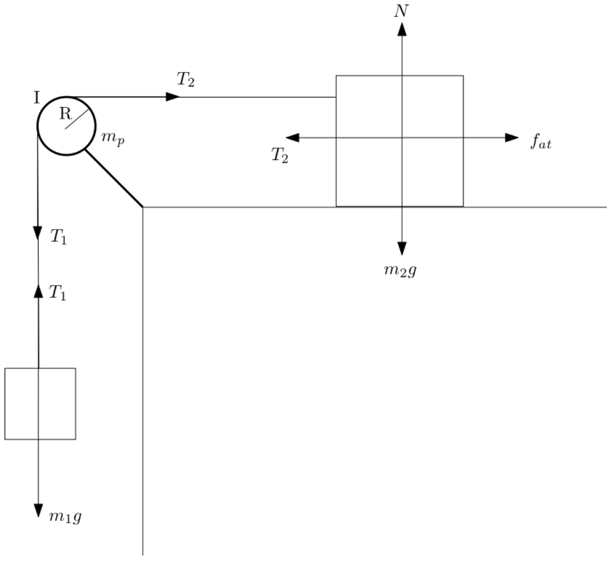
onde sabemos que $v' = \sqrt{\frac{2E}{m}}$.

(d) Por conservação de energia, sabemos que a velocidade da partícula imediatamente depois de parar de interagir com o núcleo é dada por $v' = \sqrt{\frac{2E}{m}}$, isto é, a energia cinética do início será a energia cinética do final e isolamos a velocidade.

Questão 8

Uma roldana de massa m_p e raio R com momento de inércia I em relação ao seu centro, está presa na borda de uma mesa. Um cabo ideal de massa desprezível e inextensível passa em torno da roldana e é preso ao bloco 2 que desliza sobre a mesa (considere que o cabo não deslize sobre esta). O outro lado do cabo é preso a um bloco 1 que está em queda. O coeficiente de atrito dinâmico em da mesa com o bloco é u. Suponha que o bloco 1 e 2 tenham massas respectivamente $m_1 > m_2$. Qual a aceleração dos blocos? Compare seu resultado para o caso em que a roldana possui massa nula e discuta o que ocorre com as trações.

Solução: Para facilitar a argumentação, disponibilizo um diagrama do sistema com as respectivas grandezas indicas:



Escrevendo a segunda lei de Newton para os dois blocos, temos:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a$$
$$T_2 - f_{at} = m_2 a$$

onde $f_{at} = uN = um_2 g$ uma vez que no bloco 2 a força peso $m_2 g$ se equilibra com a força Normal.

Além disso, analisando os torques na roldana, podemos convencionar o sentido de rotação anti-horário como positivo para afirmar

$$\tau_{T_1} + \tau_{T_2} = T_1 R - T_2 R = I\alpha$$

Multiplicando as equações obtidas para os 2 blocos por R dos dois lados das equações e agrupando, temos

$$m_1 gR - T_1 R = m_1 aR$$
$$T_2 R - um_2 gR = m_2 aR$$
$$\tau_{T_1} + \tau_{T_2} = T_1 R - T_2 R = I\alpha$$

Somando as três equações e usando que $\alpha = \dfrac{a}{R}$ porque a corda não desliza, encontramos

$$m_1 g\cancel{R} - um_2 g\cancel{R} = a\cancel{R}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)$$

$$\therefore a = \frac{g(m_1 - um_2)}{\left(m_1 + m_2 + \dfrac{I}{R^2}\right)}$$

No caso em que a roldana possui massa nula, seu momento de inércia I também será zero, e a equação dos torques resultará em

$$T_1 R - T_2 R = 0 \implies T_1 = T_2 = T$$

Ou seja, as trações que puxam os blocos se tornam iguais. Com essa nova configuração,

$$m_1 g - T = m_1 a'$$
$$T - um_2 g = m_2 a'$$

Somando as equações,

$$a' = \frac{g(m_1 - um_2)}{(m_1 + m_2)}$$

O que difere por um fator $\frac{I}{R^2}$ adicional no denominador em relação ao outro resultado. Isso significa que $a' > a$, isto é, a aceleração do sistema quando a roldana possui massa zero é maior do que quando não o é.

Questão 9

Um objeto de massa $0,20$ kg move em uma superfície horizontal sem atrito e está fixado a um elástico de borracha de comprimento x, a outra extremidade do elástico está fixada no ponto P. O elástico exerce uma força de magnitude $F = bx$ tal que, b uma constante desconhecida. A força do elástico aponta para dentro em direção a P. O corpo move ao longo da linha pontilhada da Figura 4. Quando o objeto passa no ponto A, sua velocidade é de $4,0$ m/s, como ilustrado. A distância AP é $0,60$ m e BP é $1,0$ m.

(a) Ache a rapidez do objeto nos pontos B e C;

(b) Ache a constante b.

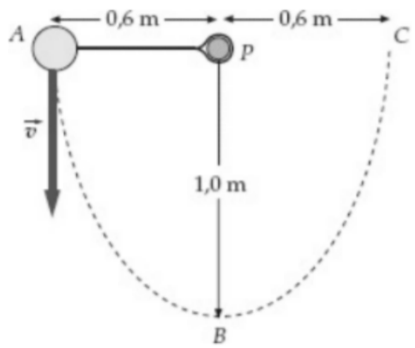


Figura 4: Figura questão 9.

Solução: O momento angular do sistema deve ser conservado porque a força peso se anula com a força normal entre o objeto e a superfície horizontal (assumo que a Figura 4 é uma visão de cima do sistema), e a força do elástico no objeto atua na mesma direção que o vetor posição com respeito ao ponto P, produzindo um torque externo nulo.

(a) Sabendo que $L = |\vec{r} \times \vec{p}| = rmv$ é uma constante, onde r é a distância do ponto P até o objeto, temos que

$$L_A = L_B \iff r_a v_a = r_b v_b \iff v_b = \frac{r_a}{r_b} v_a = 0,6 v_a = 0,6 \cdot 4,0 = 2,4 \text{ m/s}$$

E também que

$$L_A = L_C \iff r_a v_a = r_c v_c \iff v_c = \frac{r_a}{r_c} v_a = v_a = 4,0 \text{ m/s}$$

Onde utilizou-se $r_a = r_c = 0,6$ m e $r_b = 1,0$ m.

(b) Posto que as únicas forças envolvidas no sistema são forças conservativas, a energia mecânica no ponto A é igual à energia mecânica no ponto B, isto é

$$\frac{1}{2} m v_a^2 + \frac{1}{2} b r_a^2 = \frac{1}{2} m v_b^2 + \frac{1}{2} b r_b^2 \iff b = \frac{m(v_b^2 - v_a^2)}{r_a^2 - r_b^2} = 3,2 \text{ N/m}$$

Questão 10

Uma haste rígida e de massa desprezível está ligada a três partículas de massa m. A haste está livre para girar em um plano vertical em torno de um eixo, sem fricção, perpendicular à haste através do ponto P e é liberada do repouso na posição horizontal em $t = 0$. Assumindo que m e d são conhecidos, encontre:

(a) O momento de inércia do sistema (partículas e haste) em relação ao ponto P;

(b) O torque agindo no sistema em $t = 0$;

(c) A aceleração angular do sistema em $t = 0$;

(d) A aceleração linear da partícula 3 da Figura 5 em $t = 0$;

(e) A energia cinética máxima do sistema;

(f) A velocidade angular máxima atingida pela haste;

(g) O momento angular máximo do sistema;

(h) A velocidade máxima da partícula 2 da Figura 5.

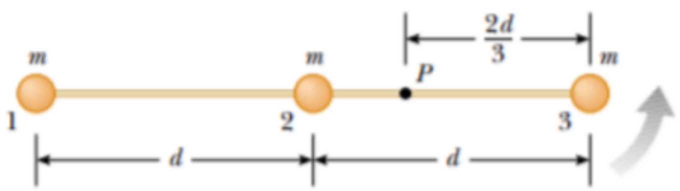


Figura 5: Figura questão 10.

Solução:

(a) Por definição, o momento de inércia é calculado através de

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Onde m_i é a massa da partícula i e r_i^2 o módulo da distância entre a partícula e o eixo de rotação. Portanto,

$$I = m\left(\frac{2d}{3}\right)^2 + m\left(\frac{d}{3}\right)^2 + m\left(\frac{4d}{3}\right)^2 = \frac{7}{3}md^2$$

(b) O torque agindo no sistema em relação ao ponto P (denotado por τ_P) será calculado com a convenção de que a tendência de rotação no sentido anti-horário está associada a torques positivos e o oposto vale para os torques negativos, então

$$\tau_P = \tau_1 + \tau_2 - \tau_3 = mg\left(\frac{4d}{3} + \frac{d}{3} - \frac{2d}{3}\right) = mgd$$

onde τ_i denota o torque devido à partícula i.

(c) Como o momento de inércia é constante, podemos dizer que $\tau_P = I\alpha$, onde α é a aceleração angular. Dessa forma, utilizando o momento de inércia calculado no item (a) e o torque no item (b), temos

$$\alpha = \frac{\tau_P}{I} = \frac{3}{7\cancel{m}d^2} \cdot \cancel{m}gd = \frac{3}{7d}g$$

(d) Sabendo que não há nenhum tipo de deslizamento, podemos dizer que $a = \alpha r$ onde a é a aceleração linear e r é a distância entre a partícula de referência e o eixo de rotação. Então, para a partícula 3 da Figura 5 em $t = 0$, e utilizando a aceleração angular calculada no item (c), temos

$$a_3 = \alpha \cdot \frac{2d}{3} = \frac{2}{7}g$$

(e) Por conservação de energia e adotando como nível de potencial gravitacional zero o plano que contém a haste inicialmente, podemos dizer que

$$0 = U + E_c = mg\left(\frac{2d}{3} - \frac{d}{3} - \frac{4d}{3}\right) + E_c \iff E_c = mgd$$

É a energia cinética máxima porque trata-se da configuração da haste na vertical, onde a energia potencial é mínima (duas das partículas estão abaixo do ponto P).

(f) A energia cinética se deverá apenas a rotação (deduz-se do enunciado que a haste não pode transladar, é um movimento de rotação pura), portanto $E_c = \frac{I\omega^2}{2} \iff \omega = \sqrt{\frac{2E_c}{I}}$ e então ω será máximo quando E_c for identicamente máximo, cujo valor foi calculado no item (e), isto é

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{2mgd}{\frac{7}{3}md^2}} = \sqrt{\frac{6g}{7d}}$$

(g) O momento angular é dado por $L = I\omega$. Posto que o momento de inércia é constante, o seu valor será máximo quando a velocidade angular for igualmente máxima, o que foi calculado no item (f), ou seja

$$L_{max} = I\omega_{max} = \frac{7}{3}md^2 \cdot \sqrt{\frac{6g}{7d}} = md\sqrt{\frac{14}{3}gd}$$

(h) A velocidade da partícula 2 é dada por $v_2 = \omega r_2$. Sabendo que $r_2 = \frac{d}{3}$ é a distância entre a partícula 2 e o eixo de rotação, constante durante todo o movimento, então v_2 será máximo quando ω for máximo, o que já foi calculado no item (f), então

$$v_{2_{max}} = \omega_{max} \cdot \frac{d}{3} = \sqrt{\frac{6g}{7d}} \cdot \frac{d}{3} = \sqrt{\frac{2gd}{21}}$$