Fundamentos Matemáticos para Físicos

Victor Hugo dos Santos Lins

Instituto de Física - Universidade de São Paulo,
R. do Matão 1371,
Cidade Universitária, São Paulo, Brasil.

E-mail: victorlins@usp.br

Resumo: Estas são notas de aula para um minicurso a ser ministrado aos ingressantes de graduação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo durante a recepção de calouros de 2022. As notas dizem respeito a um tratamento das funções, trigonometria, números complexos, polinômios, matrizes e uma introdução ao cálculo diferencial e integral, para auxiliar na entrada dos novos físicos no ensino superior.

Palavras-chave: Pré-Cálculo, Cálculo Diferencial e Integral

Introdução

Estas são notas de aula para um minicurso a ser ministrado aos ingressantes de graduação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo durante a recepção de calouros de 2022. As notas dizem respeito a um tratamento das funções, trigonometria, números complexos, polinômios, matrizes e uma introdução ao cálculo diferencial e integral, para auxiliar na entrada dos novos físicos no ensino superior.

Não é assumido nenhum pré-requisito específico, o intuito do minicurso é revisar alguns conteúdos que foram vistos no ensino médio ao passo de que são introduzidos de forma suave os formalismos matemáticos. Os primeiros quatro capítulos das notas podem ser encarados como um pré-cálculo, enquanto que o último capítulo tem como objetivo realizar uma verdadeira introdução ao cálculo diferencial e integral.

É importante ter em mente que nem todo o texto será estritamente rigoroso no que se refere a matemática, uma vez que esse tipo de conteúdo já é facilmente encontrado em qualquer livro canônico de Cálculo, como o Guidorizzi e o Apostol, e a maioria dos integrantes do público-alvo desse minicurso (os bixos) provavelmente ainda não estão tão acostumados com esse tipo de abordagem. O objetivo principal deste manuscrito é elaborar sobre os assuntos mencionados de modo a estabelecer um equilíbrio entre intuição e formalismo, motivação física sempre que for possível, além de se aprofundar nos detalhes mais técnicos através dos exemplos e exercícios. Além disso, de vez em quando serão levantados de forma breve e sucinta alguns conceitos ou termos técnicos que não fazem parte do escopo do curso, apenas para instigar a curiosidade e dar um gostinho do que os ingressantes terão contato ao longo da graduação, na maior parte das vezes em formato de comentário ou nota de rodapé.

Conto com a sua ajuda para a melhoria desse material. Qualquer crítica construtiva, dúvida ou coisas do gênero, fique à vontade para me contatar por e-mail em victorlins@usp.br ou me procurar para bater um papo pela USP! :)

> "Ninguém nunca descobre do que realmente se trata a vida, e isso não importa. Explore o mundo. Praticamente tudo é realmente interessante se você olha fundo o suficiente. "
>
> Richard P. Feynman

Sumário

Funções Reais

1.1 Motivação

Funções são um dos objetos da matemática mais utilizados até hoje, desde contextos mais aplicados, físicos, como determinar a trajetória, velocidade e aceleração de uma partícula em termos do tempo, a temperatura de um ponto dentro de uma sala de aula, o campo eletromagnético em um ponto do espaço, até contextos absolutamente abstratos como homeomorfismos entre variedades topológicas.

Devido à vasta diversidade de aplicações das funções na matemática e na física e o fato delas serem base para muito do que estudaremos a seguir, iniciaremos esse minicurso estudando-as. No fundo, elas funcionarão como "'máquinas" que "engolem" uma entrada (input) e "cospem" alguma coisa como saída (output). Para concordar com o escopo desse minicurso, estudaremos aqui apenas as funções *reais*, o que significa que trabalharemos com inputs e outputs que são subconjuntos de números reais. É importante notar, porém, que a ideia de função vai se aplicar para vários outros espaços, e não somente nos números reais.

Figura 1: Ilustração presente no livro "Cálculo em Quadrinhos" *do Larry Gonick.*

1.2 O conceito de função

Para entender o conceito de função, vamos fazer uma analogia. Considere o conjunto R, que expressa a cidade de Roma, e o conjunto P, que expressa uma folha de Papel A4. Você pode pensar como se cada elemento dos respectivos conjuntos representasse um ponto nas respectivas superfícies, com relação a algum referencial arbitrário localizado nelas.

Agora, imagine que para cada ponto geográfico na cidade de Roma você associe *um, e só um* ponto no seu Papel A4. É possível expressar essa relação pelo que chamamos de *função*, que também costuma ser chamada na literatura de *mapa*. De fato, se você para pra pensar, o que a função está fazendo é estabelecer um mapa para guia-lo em de que forma os pontos de Roma devem ser representados no Papel A4. Evidentemente, não existe apenas uma forma de *mapear* Roma no Papel, portanto podem existir várias funções distintas para um mesmo par de conjuntos. Simbolicamente, escrevemos:

$$\begin{aligned} f : R &\longrightarrow P \\ r &\longmapsto f(r) \end{aligned}$$

onde $r \in R$ e $f(r) \in P$. Nessa notação, $f(r)$ implicitamente significa que tomamos um elemento de R e aplicamos algum tipo de regra nele (que caracteriza a função), retornando um valor que "vive" em P. Usando o contexto da analogia anterior, toma-se um ponto em Roma e leva-se, segundo alguma regra, até um ponto no Papel.

Rigorosamente, dizemos que o conjunto dos pontos em que a função atua (nesse caso, R) é o *domínio*, o conjunto em que os pontos são levados (nesse caso, P) é o *contradomínio*, a regra associa cada elemento do domínio a um único elemento do contradomínio, enquanto que o conjunto dos pontos efetivamente "atingidos" no contradomínio pela função é a *imagem* [6] (note que eu não preciso usar toda a folha de Papel A4 para mapear Roma, eu poderia usar apenas metade da folha para isso, então a imagem é menor do que o contradomínio, o que significa que contradomínio e imagem nem sempre irão coincidir). Isso ficará mais transparente com os exemplos a seguir.

Nota 1. Como notação, adotaremos D_f para o domínio e Im_f para a imagem da função f. ♣

Exemplo 1. Considere os conjuntos $A = \{1,2\}$ e $B = \{1,2,3\}$, e a seguinte função:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto f(a) \end{aligned}$$

tal que $f(1) = 2, f(2) = 1$. Por definição, temos que A é o domínio de f e B é o contradomínio de f. No entanto, como explicitado, ao atuarmos a função f nos elementos do domínio, encontramos como resultado apenas os números 1 e 2, mas não o número 3. Observe que apesar do número 3 pertencer ao contradomínio, ele não é "atingido" pela função, logo, dizemos que 3 não pertence ao conjunto imagem. Com efeito, $Im_f = \{1, 2\} \neq B = \{1, 2, 3\}$. Ou seja, em geral, o contradomínio não será identicamente igual à imagem. ▲

Adiante, é conveniente introduzir os conceitos de função injetora, sobrejetora e bijetora, que servirão para realizar análises de funções.

Classificação de Funções

Definição 2. Uma função é dita *injetora* quando mapeia os elementos do domínio de forma que cada elemento da imagem seja "atingido" por um único elemento do domínio, mas o contradomínio não precisa coincidir com a imagem. ♠

Definição 3. Uma função é dita *sobrejetora* quando mapeia os elementos do domínio de forma que a imagem coincide com o contradomínio, mas nem todo elemento da imagem precisa ter sido originado por um único elemento do domínio. ♠

Definição 4. Uma função é dita *bijetora* quando ela é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. ♠

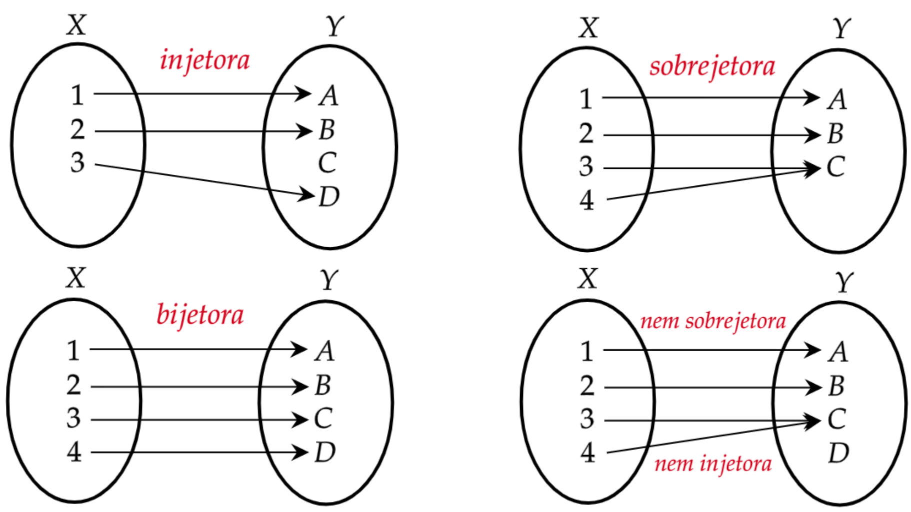


Figura 2: Analisando com exemplos as classificações das funções.

1.3 Gráficos e operações

Estamos tratando de funções com domínio e contradomínio reais ou subconjuntos de reais. Por essa razão, uma representação conveniente para as funções são os gráficos.

Nota 2. De agora em diante neste texto, a menos que contrariamente explicitado, conjuntos enunciados arbitrariamente serão sempre subconjuntos de $\mathbb{R}$. ♣

Gráfico de uma função

Definição 5. Sejam A e B dois conjuntos e $f : A \to B$ uma função. O conjunto de pontos

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

é chamado de *gráfico de* f. [2] ♠

Observe que essa definição implica que conseguimos representar f como um conjunto de pontos em $\mathbb{R}^2$, isto é, pontos que podem ser identificados via algum sistema de coordenadas pelo menos bidimensional, por exemplo o cartesiano, como sugere a Figura 3.

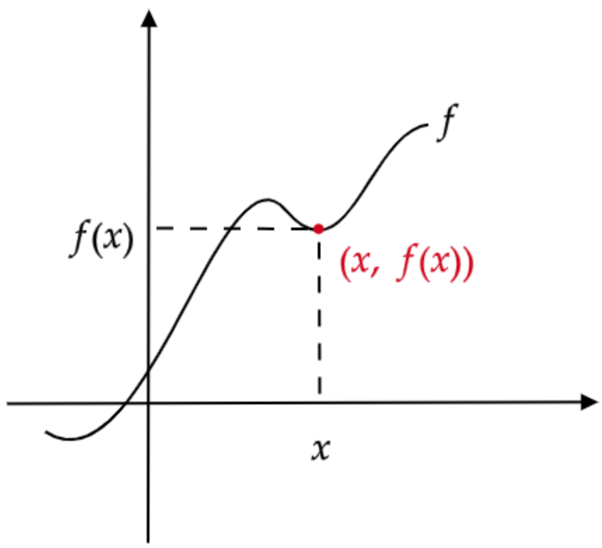


Figura 3: Gráfico de uma função arbitrária.

Nota 3. A representação usual via plano cartesiano induz a usarmos a notação $y = f(x)$. Dessa forma, a ordenada y dos pontos do gráfico da função serão identicamente iguais à função aplicada na respectiva abscissa x. ♣

Funções Elementares

Exemplo 6. Abaixo estão listadas algumas das funções mais utilizadas na física:

(i) $f(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$ (função constante)

(ii) $f(x) = x$ (função identidade)

(iii) $f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ (polinômio genérico de grau N)

(iv) $f(x) = |x|$ (função modular)

(v) $f(x) = \sqrt{x}$ (função raíz quadrada)

(vi) $f(x) = \ln x,\ \ g(x) = e^x$ (funções logaritmo natural e exponencial)

(vii) $f(x) = \sin x,\ \ g(x) = \cos x$ (funções seno e cosseno)

▲

Vale ressaltar que existem diversas outras funções importantes para a física e comuns na matemática, além das que podem ser construídas através de operações como soma, produto e razão de funções [1].

No Cálculo Diferencial e Integral, ter familiaridade com essas funções e conseguir manipulá-las em expressões algébricas é essencial. No entanto, é preciso tomar cuidado a um detalhe sutil na definição de função: a cada elemento do domínio, se atribui um, e só um, elemento do contradomínio.[1]

Exercício 1. Determine o domínio das seguintes funções:

(a) $h(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x}$

(b) $\phi(x) = \sqrt{\dfrac{2x-1}{1-3x}}$

★

[1] Por essa razão, um teste interessante para verificar se uma relação pode ser uma função é observando o seu gráfico – ao traçar uma reta vertical em qualquer lugar, conta-se o número de interseções da mesma com o gráfico: se existir mais de uma interseção, não é função. Você consegue enxergar o porquê?

Exercício 2. Considere a função $f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, sendo $f(x) = x^2$ e h um escalar real e resolva os itens na ordem em que são apresentados:

(a) Simplifique o numerador da função $f'(x)$;

(b) Distribua o denominador h da função pelos termos do novo numerador e simplifique novamente;

(c) Determine o resultado quando você impõe $h = 0$. Reflita como, desta maneira, você encontrou um resultado finito apesar de $h = 0$ violar o domínio de $f'(x)$, que a faria ir ao infinito (ou seja, encontre qual foi o equívoco cometido por esse procedimento).

Além das operações usuais de soma, produto e razão entre funções (que gera novas funções), uma outra forma de trabalhar é através da composição.

Composição de funções

Definição 7. Sejam f e g duas funções tais que $Im_f \subset D_g$. A função dada por

$$y = g(f(x)), \quad x \in D_f \tag{1.1}$$

denomina-se função composta de g em f. A notação usual para representar a composição e a sua ordem é $g \circ f$. ♠

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Figura 4: Composição de mapas.

Para deglutir melhor a abstração, observe como funciona no exemplo a seguir.

Exemplo 8. Seja $g(x) = 3x + 1$ e $f(x) = x + 2$, determine a composição $h = g \circ f$.

Solução.

$$h(x) = g(f(x)) = g(x+2) = 3(x+2)+1 = 3x+6+1 = 3x+7$$

▲

Exercício 3. Determine f de modo que $g(f(x)) = x$, $\forall x \in D_f$, sendo $g(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$. ★

Por fim, também devemos aprender sobre a ideia de função inversa.

Função Inversa

Definição 9. Dada uma função f, sua função inversa é uma função que desfaz a ação de f em x, que existirá se, e somente se, f for bijetora, e é denotada por f^{-1}. Ela é tal que envia um $y \in Y$ para um único $x \in X$ com $f(x) = y$. Nesse caso, escrevemos

$$f : X \to Y \iff f^{-1} : Y \to X$$

Por essa razão, a composição da inversa com a função e vice-versa é tal que $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$. ♠

Exemplo 10. A função $f(x) = 5x+2$ é bijetora, logo admite inversa. Sua inversa é dada por $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{5}$, uma vez que

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(5x+2) = \frac{(5x+2)-2}{5} = x \tag{1.2}$$

e também que

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-2}{5}\right) = 5\left(\frac{x-2}{5}\right) + 2 = x \tag{1.3}$$

▲

1.4 Funções afim, quadrática, exponencial e modular

Agora que compreendemos melhor o conceito de função, gráficos, e nos familiarizamos com os tipos de operação que podemos fazer, vamos analisar com mais profundidade algumas das funções mais importantes. [8]

1.4.1 Função Afim

Também chamadas de funções lineares, estas provavelmente são uma das mais comuns de aparecerem na física. A velocidade de uma partícula submetida a uma força constante é linear com o tempo, a energia potencial gravitacional de um corpo é linear com a altura (desnível), o momento de um projétil é linear com a velocidade, entre outros exemplos. Uma função afim é definida como a seguir:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax+b \end{aligned}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. A constante a é chamada de coeficiente angular, enquanto que b é chamado de coeficiente linear. Dado dois pontos x_1 e x_2, é possível encontrar o valor de a se $f(x_1)$ e $f(x_2)$ forem conhecidos, da seguinte forma:

$$f(x_1) = ax_1+b, \;\; f(x_2) = ax_2+b \implies f(x_2)-f(x_1) = (ax_2+b)-(ax_1+b) = a(x_2-x_1)$$

$$a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \tag{1.4}$$

Esse procedimento costuma ser útil quando é fornecido o gráfico da função afim e precisamos determinar os coeficientes da sua lei de formação ($y = ax+b$). O gráfico da função afim é uma reta, que pode ser crescente ou decrescente a depender do sinal de a, e cuja interseção com o eixo das ordenadas (y) vale b. Observe a Figura 5.

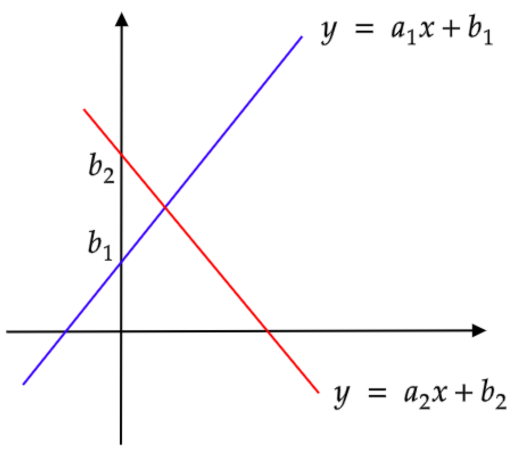


Figura 5: Duas retas que se cruzam.

Note que a reta azul é crescente, porque $a_1 > 0$, enquanto que a reta vermelha é decrescente, porque $a_2 < 0$. A coordenada y dos pontos de interseção das retas com o eixo das ordenadas foi o respectivo coeficiente linear de cada reta, enquanto que a coordenada x dos pontos de interseção das retas com o eixo das abscissas foi obtida resolvendo a equação $y = ax + b = 0 \iff x = -b/a$. A estas últimos, nos referimos a *raízes da função*, e o mesmo princípio será adotado para todas as outras funções que estudaremos.

1.4.2 Função Quadrática

Essas funções também aparecem com certa frequência na física, modelando grandezas como a energia cinética (que varia com o quadrado da velocidade), a posição de uma partícula submetida a aceleração constante (que varia com o quadrado do tempo), etc. Uma função quadrática é definida como a seguir:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ (senão estaríamos diante de uma função afim, e não quadrática). O gráfico desta função é uma parábola, cuja concavidade é voltada para cima ou para baixo a depender do sinal do coeficiente a.

Além disso, o coeficiente b indica se o gráfico cresce ou decresce após cruzar o eixo das ordenadas, e como sempre o coeficiente independente c indica a coordenada y em que a parábola cruza o eixo das ordenadas. Observe a Figura 6 para compreender melhor essas informações. As raízes dessas parábolas podem ser encontradas resolvendo a equação $ax^2 + bx + c = 0$, o que dá origem a fórmula de Bhaskara.

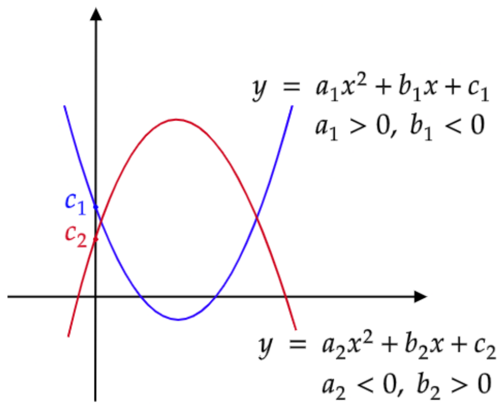


Figura 6: Duas parábolas com coeficientes distintos.

Fórmula de Bhaskara

Dada uma função do segundo grau $ax^2 + bx + c$, as suas raízes x são dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.5}$$

Uma demonstração canônica da fórmula de Bhaskara[2] é fornecida a seguir:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\iff x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \ \Delta \equiv b^2 - 4ac \end{aligned} \tag{1.6}$$

1.4.3 Função Exponencial

Muito utilizada para modelar decaimentos radioativos e crescimentos populacionais, aparece com frequência na resolução de equações diferenciais, além de servir como um recurso valioso nos números complexos, via fórmula de Euler, que aprenderemos em breve. É definida através de

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto a^x \end{aligned}$$

onde $a \in \mathbb{R}$ com $0 < a \neq 1$ (reflita o porquê de se permitíssemos valores de $a \leq 0$ ou $a = 1$ iria-se contradizer as condições para ser classificada como uma função). Possui domínio real e contradomínio apenas os reais positivos. O gráfico desta função não tem raízes porque para $y = 0$ seria necessário que $x \to \pm\infty$ (a depender do valor de a), e será crescente ou decrescente a depender, também, do valor de a. Por fim, todas as exponenciais cruzam o eixo y em $y = 1$. Observe a Figura 7 para entender melhor.

Um caso que provavelmente é a exponencial mais usada na física ocorre quando a base a é o número de Euler e, ou seja, a função $f(x) = e^x$, principalmente por contemplar propriedades especiais, como a sua derivada e a sua integral coincidirem com a própria função, assim como veremos no final do minicurso.

[2] Curiosamente, o hábito de se referir a essa equação como fórmula de Bhaskara é mais comum no Brasil, no exterior o mais comum é um equivalente a "fórmula quadrática".

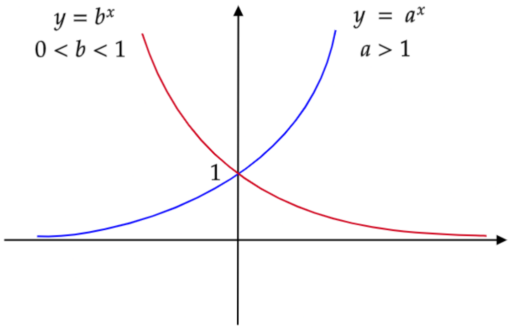


Figura 7: Duas exponenciais com coeficientes distintos.

1.4.4 Função Modular

Essa função é utilizada o tempo inteiro no Cálculo 1, porque as definições de continuidade e limite possuem como peça central uma inequação modular. Uma função modular é definida como

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}$$

onde recordamos que $|x|$ é uma notação que expressa

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

Além disso, lembramos algumas das propriedades do módulo que se mostrarão muito úteis quando você estudar a definição formal de limites e continuidade ou estiver empregando outras demonstrações que envolvam inequações modulares [12]:

Propriedades do Módulo

$$|x| \geq y \iff x \geq y \text{ ou } x \leq -y \tag{1.8}$$

$$|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y \tag{1.9}$$

$$\left|x + y\right| \leq |x| + \left|y\right| \tag{1.10}$$

Em sua expressão canônica, $f(x) = |x|$, o gráfico é representado na ilustração a seguir:

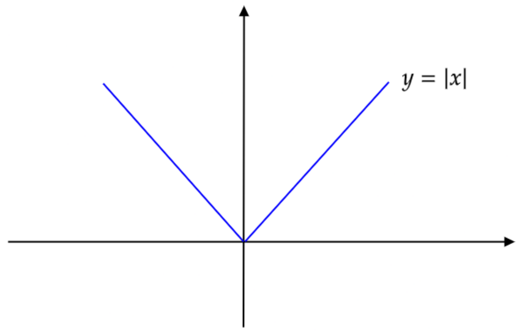


Figura 8: Função Modular (canônica).

Apesar de que é possível fazer operações com o módulo e obter gráficos distintos a esse, como os gráficos das funções $f(x) = 2|x| - 1$, $g(x) = |x|^2 + 2|x| + 3$, $h(x) = \ln|x|$, e por aí vai.

Trigonometria

2.1 Motivação

As funções trigonométricas regem diversos fenômenos da natureza por conta da sua característica periódica, e dialogam muito bem com a geometria dos objetos. Na física, é bastante comum determinarmos as componentes de um vetor em função de senos e cossenos, como a velocidade de um projétil em lançamento oblíquo, além dessas funções modelarem ondas (tanto mecânicas quanto eletromagnéticas), oscilações, etc.

Além disso, as identidades que ditam como as funções trigonométricas se relacionam aparecem com frequência para resolver problemas mais simples, como as razões dos lados de um triângulo retângulo na geometria plana, até problemas mais complicados, como via para resolver integrações.

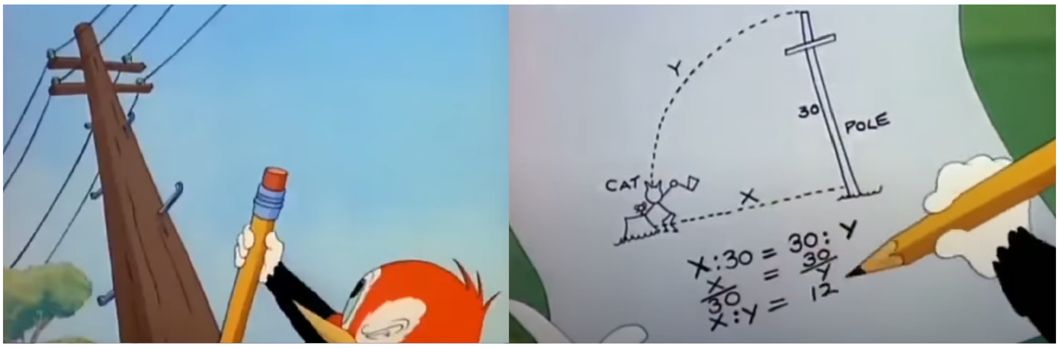


Figura 9: Cena do desenho Tom e Jerry.

2.2 Funções seno e cosseno

As famosas funções $\sin\theta$ e $\cos\theta$ constituem as coordenadas do ciclo trigonométrico que aprendemos no ensino médio, sendo $\sin\theta$ a ordenada e $\cos\theta$ a abscissa do ponto P, que se refere a imagem de θ no ciclo trigonométrico (observe a Figura 10 para visualizar melhor isso).

Como o ciclo trigonométrico possui raio unitário, podemos aplicar o teorema de Pitágoras para concluir o seguinte:

Relação Fundamental da Trigonometria

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{2.1}$$

Você usará essa equação incansavelmente ao longo do curso de física, na maior parte do tempo para realizar simplificações ou talvez uma manipulação para obter alguma relação que antes não estava explicitada. Além disso,

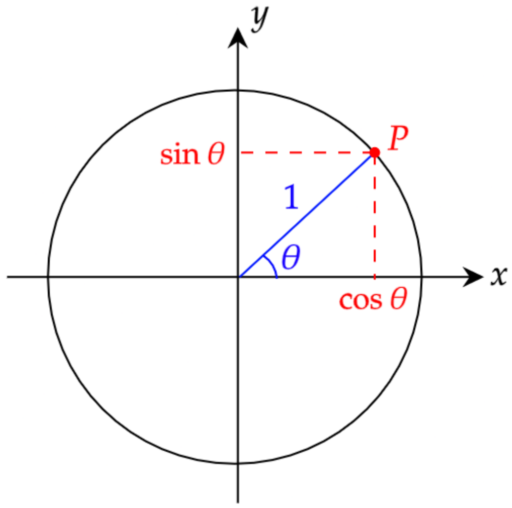


Figura 10: O ciclo trigonométrico.

como estamos definindo a função seno e cosseno através do ciclo trigonométrico e o mesmo possui raio unitário, automaticamente podemos concluir que a imagem dessas funções de domínio $\mathbb{R}$ é o intervalo $[-1, 1]$. O ciclo é dividido em quadrantes:

- 1° quadrante: região onde $x > 0$ e $y > 0$
- 2° quadrante: região onde $x < 0$ e $y > 0$
- 3° quadrante: região onde $x < 0$ e $y < 0$
- 4° quadrante: região onde $x > 0$ e $y < 0$

por esse motivo, $\cos\theta > 0$ no 1° e 4° quadrante, $\cos\theta < 0$ no 2° e 3° quadrante, $\sin\theta > 0$ no 1° e 2° quadrante e $\sin\theta < 0$ no 3° e 4° quadrante.

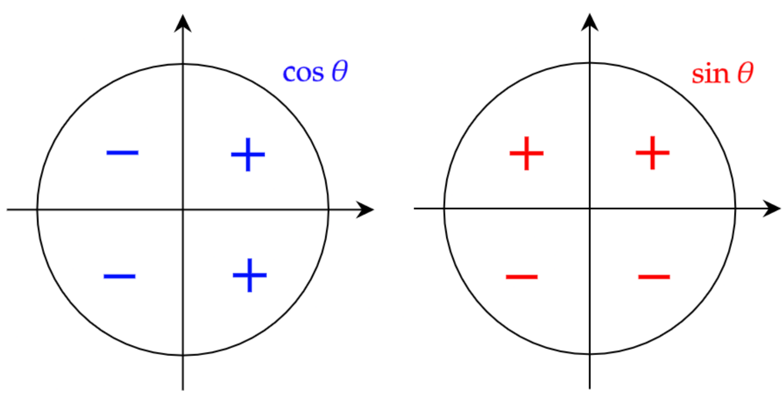


Figura 11: No primeiro ciclo, destaco os quadrantes em que a função cosseno é positiva ou negativa, e no segundo ciclo, o mesmo para a função seno.

Exemplo 11. Dado que o cosseno de 120° vale −1/2, determine o seno de 120°. *Dica: lembre-se que* 120° *está no segundo quadrante.*

Solução. Usando a relação fundamental da trigonometria,

$$\cos^2(120°) + \sin^2(120°) = 1 \implies \sin^2(120°) = 1 - \cos^2(120°) = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\implies \cos(120°) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para determinar se vai ser positivo ou negativo, basta lembrar que no 2° quadrante a função seno é positiva,

$$\therefore \sin(120°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

▲

Devido a simetria do círculo, podemos observar na Figura 10 que

$$\sin(\theta) = -\sin(-\theta) \tag{2.2}$$

$$\cos(\theta) = \cos(-\theta) \tag{2.3}$$

ou seja, a função seno é uma função *ímpar* e a função cosseno é uma função *par*. Geometricamente, ainda, é possível demonstrar[3] que $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$, vale

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a \tag{2.4}$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \tag{2.5}$$

Devido à existência de arcos côngruos (30° e 390° dizem respeito a um mesmo ponto P do ciclo trigonométrico porque ocorre uma volta inteira em torno do ciclo), essas funções serão ditas periódicas, de período 2π rad, isto é, 360°. Graficamente conseguimos perceber essa periodicidade, nas Figuras 12 e 13. Matematicamente, a periodicidade é expressa por

$$\sin x = \sin(\theta + 2\pi) \tag{2.6}$$

$$\cos x = \cos(\theta + 2\pi) \tag{2.7}$$

[3]Consulte [3] se estiver curioso a respeito da demonstração.

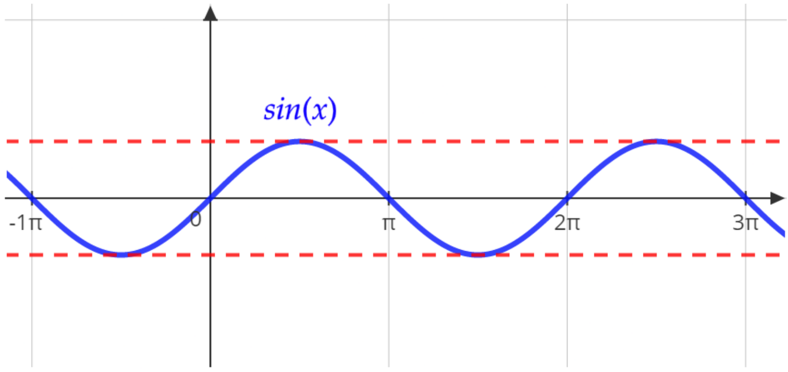


Figura 12: A função seno.

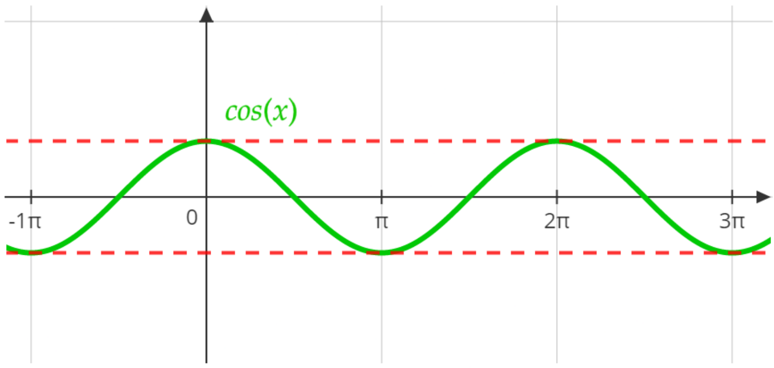


Figura 13: A função cosseno.

Olhando para esses gráficos você também pode perceber que a função seno é muito parecida com a função cosseno, salvo uma defasagem de $\pi/2$ entre os dois gráficos. Com efeito, baseado nisso, podemos dizer que

$$\sin(\theta) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.8}$$

$$\cos(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.9}$$

não obstante, também vale

$$\sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \tag{2.10}$$

$$\cos(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \tag{2.11}$$

Todas essas relações provavelmente serão de alguma forma úteis ao longo da graduação, você precisará delas para realizar manipulações, simplificações, atalhos para chegar em algum resultado que do contrário daria bem mais trabalho, dar “luz” para alguma expressão que pode estar oculta, etc.

Não tente decorar todas cegamente, você irá memorizar naturalmente com a prática.

Exercício 4. Usando as relações de seno e cosseno da soma, apresentadas nas eqs. (2.4) e (2.5), demonstre as eqs. (2.6), (2.7), (2.8), (2.9), (2.10) e (2.11). ★

2.3 Função tangente e as funções secundárias

A partir das funções seno e cosseno, podemos definir outras funções que também serão muito utilizadas no Cálculo e na Física. A primeira delas é a função tangente, obtida através da razão da função seno pela função cosseno.

$$\tan\theta \equiv \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{2.12}$$

cujo gráfico é dado na Figura 14. Observe que existem assíntotas verticais nos pontos esperados (valores de θ que zeram $\cos\theta$ e portanto fazem a tangente tender ao infinito).

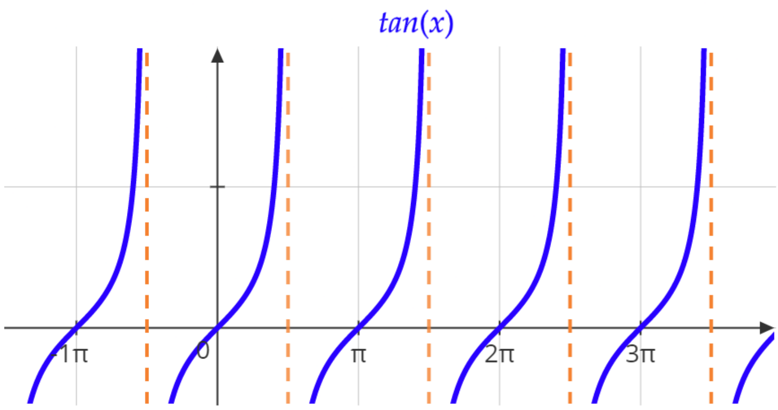


Figura 14: A função tangente.

Exercício 5. Reconhecendo que $\tan(a+b) = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$, demonstre a seguinte fórmula para a tangente da soma:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \tag{2.13}$$

★

Além disso, podemos definir também as funções secundárias (secante, cossecante e cotangente):

$$\sec\theta \equiv \frac{1}{\cos\theta} \tag{2.14}$$

$$\csc\theta \equiv \frac{1}{\sin\theta} \tag{2.15}$$

$$\cot\theta \equiv \frac{1}{\tan\theta} \tag{2.16}$$

cujos gráficos não são de essencial relevância para o desenvolvimento desse minicurso, mas podem ser encontrados facilmente em [3]. Além dessas, também existem as funções inversas, que denotamos por $\sin^{-1}(\theta) = \arcsin(\theta)$, $\cos^{-1}(\theta) = \arccos(\theta)$ e $\tan^{-1}(\theta) = \arctan(\theta)$.

Exercício 6. Utilizando a relação fundamental da trigonometria, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, demonstre as seguintes relações secundárias:

(a) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

(b) $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

★

Exercício 7. Sabendo que $\sin(\theta) = \dfrac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, determine $\cos(\theta)$, $\tan(\theta)$, $\sec(\theta)$, $\csc(\theta)$ e $\cot(\theta)$. ★

2.4 Redução de quadrante e transformações

Um procedimento essencial para obter o seno e o cosseno de ângulos maiores do que 90° é a redução ao primeiro quadrante. Geralmente é conveniente memorizar apenas os valores do seno e do cosseno de ângulos do primeiro quadrante, e quando precisarmos lidar com ângulos maiores, efetuamos a mencionada redução.

As relações de redução são uma consequência da geometria do círculo e da definição das funções seno e cosseno como coordenadas dos pontos do ciclo. Além disso, é possível demonstrá-las através das relações de seno e cosseno da soma, que apresentei nas eqs. (2.4) e (2.5), faça isso!

(i) Redução do 2° ao 1° quadrante: dado o número real θ tal que $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$,

$$\sin\theta = \sin(\pi - \theta) \tag{2.17}$$

$$\cos\theta = -\cos(\pi - \theta) \tag{2.18}$$

(ii) Redução do 3° ao 1° quadrante: dado o número real θ tal que $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$,

$$\sin\theta = -\sin(\theta - \pi) \tag{2.19}$$

$$\cos\theta = -\cos(\theta - \pi) \tag{2.20}$$

(iii) Redução do 4° ao 1° quadrante: dado o número real θ tal que $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$,

$$\sin\theta = -\sin(2\pi - \theta) \tag{2.21}$$

$$\cos\theta = \cos(2\pi - \theta) \tag{2.22}$$

Exercício 8. Determine $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$ e $\tan\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)$. ★

Ademais, existem algumas transformações de arco duplo e arco metade que são muito úteis de se ter "na manga", porque aparecem na simplificação de funções e resolução de diversas integrais, e são obtidas sem tanto trabalho a partir das fórmulas de seno e cosseno da soma. Com efeito,

Fórmulas para arco duplo

$$\sin(2a) = \sin(a + a) = 2\sin a \cos a \tag{2.23}$$

$$\cos(2a) = \cos(a + a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \tag{2.24}$$

A partir da eq. (2.24), podemos tomar $2a = b$ e obter as fórmulas para o arco metade:

Fórmulas para arco metade

$$\cos(b) = 2\cos^2(a) - 1 = 2\cos^2\left(\frac{b}{2}\right) - 1 \implies \cos\left(\frac{b}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(b)}{2}} \tag{2.25}$$

$$\cos(b) = 1 - 2\sin^2(a) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{b}{2}\right) \implies \sin\left(\frac{b}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(b)}{2}} \tag{2.26}$$

Exercício 9. Sendo $\tan(\theta) = \dfrac{3}{4}$ e $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$, calcule $\sin(2\theta)$. ★

Exercício 10. Sendo $\cot(\theta) = \dfrac{12}{5}$ e $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, calcule $\cos(2\theta)$. ★

Exercício 11. Se $\sin(\theta) = \dfrac{24}{25}$ e $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$, calcule o seno, cosseno e tangente de $\dfrac{\theta}{2}$. ★

Por fim, existe mais um tipo de transformação que se assemelha ao que fazemos com polinômios nas fatorações — transformaremos uma soma em um produto.

Assim como várias das relações aqui mostradas, essas transformações são obtidas através das relações de seno e cosseno da soma (você já deve ter percebido o grande poder que é saber pelo menos essas relações: você pode derivar todo o resto a partir delas). Para isso, vamos elencar:

Senos e Cossenos da soma e da diferença

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \tag{2.27}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \tag{2.28}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \tag{2.29}$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \tag{2.30}$$

Somando as eqs. (2.27) e (2.28), temos

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$$

Fazendo (2.27) menos (2.28), temos

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a \sin b$$

Somando as eqs. (2.29) e (2.30), temos

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b$$

Fazendo (2.29) menos (2.30), temos

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin b\cos a$$

Definindo $p = a+b$ e $q = a-b$, obtemos as transformações de soma em produto (também chamadas de fórmulas de Prostaférese):

Transformações de Soma em Produto

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{2.31}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{2.32}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{2.33}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \tag{2.34}$$

Isso encerra o que precisávamos conversar a respeito de trigonometria nesse minicurso. Ao finalizar a leitura desse capítulo, você pode se sentir um pouco sobrecarregado, e isso é perfeitamente compreensível — esse capítulo provavelmente possui a maior “densidade” de relações importantes que você precisa conhecer para fazer manipulações trigonométricas. De toda a forma, eu reitero que você jamais deve tentar decorar tudo isso forçosamente, a maioria dessas relações irá te acompanhar naturalmente ao longo do tempo conforme você as utiliza várias vezes.

É normal, principalmente no começo, consultá-las aqui ou em outro texto com frequência e, algumas delas, como as fórmulas de Prostaférese, é provável que você precise consultar quase toda vez que utilizá-las por conta do seu formato um pouco mais complexo, e não tem nada de errado nisso! Agora, resolva esses últimos exercícios para solidificar o que acabou de ler.

Exercício 12. Transforme $y = \cos(3x) + \cos(x)$ em um produto de funções cosseno. ★

Exercício 13. Transforme $y = \sin(a) + \sin(b) + \sin(c) - \sin(a+b+c)$ em um produto de funções seno. ★

Números Complexos

3.1 Motivação

Números Complexos são extremamente úteis na matemática e na física. Todo polinômio de grau n possui exatamente n raízes complexas — se não tivéssemos desenvolvido o formalismo dos complexos, a álgebra ficaria "incompleta". Eles também podem ser utilizados como ferramenta para resolver equações diferenciais ordinárias e parciais, estas, por sua vez, modelam fenômenos físicos como o resfriamento, propagação de epidemias, crescimento populacional, etc.

Além disso, números complexos são essenciais para a mecânica quântica, posto que um dos seus objetos centrais (as funções de onda) são números complexos cujo módulo elevado ao quadrado representa a probabilidade de ocorrência de um possível resultado para uma medição em um dado sistema. Eles também são úteis para modelar movimentos periódicos (ondas aquáticas e luminosas), estudar a corrente alternada, e a dinâmica dos fluidos.

Com efeito, apesar dos números complexos não serem medidos de forma direta na vida real (como o tamanho de uma porta ou o seu saldo no banco), eles possuem diversas aplicações que impactam na vida real, atuando nos "bastidores" para nos ajudar a descrever a natureza e no desenvolvimento de novas tecnologias. Por essa razão, dedicaremos uma parte do nosso minicurso para estudarmos um pouco a respeito desses números que serão tão úteis ao longo da sua carreira como físico.

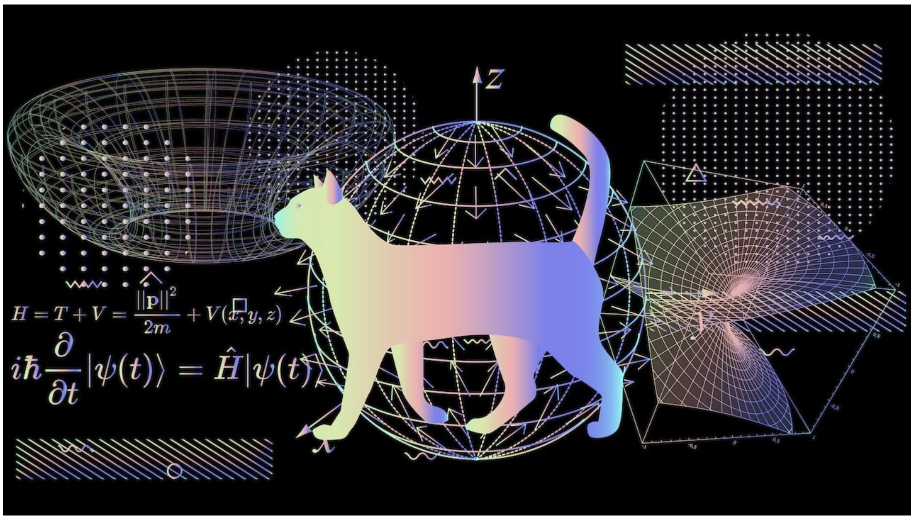


Figura 15: O formalismo da mecânica quântica é construído dentro de um espaço vetorial complexo e dotado de produto interno, chamado de espaço de Hilbert. Não se preocupe com esses termos técnicos agora, você os aprenderá ao longo da graduação, estou apenas estimulando sua curiosidade! Imagem: TheNextWeb.

3.2 A definição de números complexos

Tratam-se de números da forma $z = a + bi$, onde i é chamado de unidade imaginária, definida por $i \equiv \sqrt{-1}$, e $a, b \in \mathbb{R}$. Note que nos números reais era estritamente proibido que tivéssemos números negativos dentro de uma raíz quadrada. Aqui nós estendemos essa definição, introduzindo a unidade imaginária. Isso permite resolvermos equações como $x^2 + 1 = 0$, pois $x^2 = -1 \iff x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$.

Definimos também o *conjugado complexo de* z, como sendo $z^* = a - bi$. Dizemos que a é a parte Real de z, enquanto que b é a sua parte Imaginária, e denotamos por $\mathrm{Re}\{z\} = a$ e $\mathrm{Im}\{z\} = b$, respectivamente. Por razão dessas definições, note que

$$z + z^* = 2 \cdot \mathrm{Re}\{z\} \tag{3.1}$$

$$z - z^* = 2i \cdot \mathrm{Im}\{z\} \tag{3.2}$$

$$z = z^* \iff z \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

Exercício 14. Mostre os resultados apresentados nas eqs. (3.1), (3.2) e (3.3). ★

3.3 Operações com números complexos

Números complexos podem ser somados, subtraídos e multiplicados de forma convencional (de acordo com nossa intuição baseada nos números reais). Considere como exemplo dois números complexos: $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$. A respeito da soma, podemos afirmar:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \tag{3.4}$$

analogamente para a subtração. Além disso, no que se refere ao produto:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + i^2b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \tag{3.5}$$

Já a respeito da divisão, as coisas ficam um pouco menos intuitivas. O que devemos fazer para encontrar o resultado de $\frac{z_1}{z_2}$? Isto é, como lidar exatamente com a unidade imaginária no denominador?

A técnica reside em justamente eliminar essa dificuldade: usaremos a fatoração de diferença entre dois quadrados ao nosso favor, através do conjugado complexo do denominador, isto é

$$\frac{z_1}{z_2}\frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1)}{a_2^2 + b_2^2}$$

observe que no denominador temos exclusivamente um número real $a_2^2 + b_2^2 \equiv |z_2|^2$, também chamado de *módulo* de z_2, então o obstáculo de ter uma unidade imaginária no denominador foi contornado. A técnica sempre será em multiplicar em cima e em baixo da fração pelo conjugado complexo do denominador, fazendo-se as contas encontramos o resultado para a divisão:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2)}{|z_2|^2} - i\frac{(a_1b_2 + a_2b_1)}{|z_2|^2} \tag{3.6}$$

Nota 4. Como você pode perceber, algumas dessas expressões podem parecer meio bagunçadas e pouco prováveis de serem memorizadas, mesmo com prática. De fato, não é esperado que você se lembre dessas fórmulas, mas sim dos procedimentos (multiplicar por conjugado, utilizar propriedade distributiva, etc). ♣

Exercício 15. Considere que $z_1 = 1 + i$ e que $z_2 = 2 - 3i$. Calcule:

(a) $z_1 + z_2$

(b) $z_1 \cdot z_2$

(c) $\dfrac{z_1}{z_2}$

★

Associando a um par ordenado $(\text{Re}\{z\}, \text{Im}\{z\})$, somos capazes de representar qualquer número complexo no $\mathbb{R}^2$, nesse caso referido como plano de Argand-Gauss, observe a Figura 16.

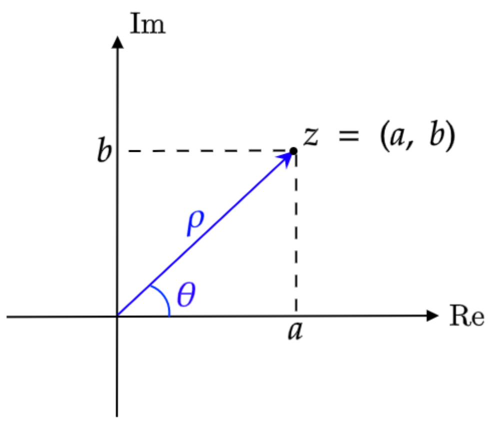


Figura 16: O plano de Argand-Gauss.

Note que por conta dessa interpretação dos números complexos como pontos (ou sua natural associação com os vetores que partem da origem), podemos escrevê-los em sua forma polar, isto é, em função de (ρ, θ), onde é possível verificar geometricamente que $\rho^2 = a^2 + b^2$, $\cos\theta = \dfrac{a}{\rho}$ e $\sin\theta = \dfrac{b}{\rho}$. Dessa forma, manipulamos:

$$z = a + bi = \rho\left(\frac{a}{\rho} + i\frac{b}{\rho}\right) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{3.7}$$

o que é informalmente denotado por $z = \rho\text{cis}(\theta)$, onde o termo "cis" diz respeito a "$\cos i \sin$". O ângulo θ é chamado de *argumento* de z, e o número real ρ é identicamente igual ao módulo do número complexo.

A forma polar dos números complexos fornece um meio mais simples de realizar as operações de potenciação e radiciação, dada pelas fórmulas de Moivre. Aqui serão enunciados os teoremas e mostrado em exemplos como utilizá-los, se você quiser pode conferir a demonstração dos mesmos em [5].

Primeira fórmula de Moivre

Teorema 12. *Dados o número complexo $z = \rho\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)$ e o número inteiro n,*

$$z^n = \rho^n \cdot (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \tag{3.8}$$

□

Segunda fórmula de Moivre

Teorema 13. *Dados o número complexo $z = \rho\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)$ e o número natural $n \geq 2$, então existem n raízes enésimas de z que são da forma*

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \tag{3.9}$$

onde $k \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ e $\sqrt[n]{\rho} \in \mathbb{R}^+$. □

Agora que as duas fórmulas de Moivre foram devidamente enunciadas, podemos entender como aplicá-las em alguns problemas. Começaremos com casos mais simples nos exemplos e no final você poderá se debruçar com alguns exercícios.

Exemplo 14. Considerando $z = 2\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$, determine quanto vale z^3.

Solução. Usando a primeira fórmula de Moivre,

$$z^3 = 2^3 \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 8 \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

▲

Exemplo 15. Considerando $z = 2 + i(2\sqrt{3})$, determine quanto vale z^5.

Solução. Em primeiro lugar, calculamos $\rho = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$. Assim, colocamos z na sua forma polar:

$$z = 2 + i(2\sqrt{3}) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Usando a primeira fórmula de Moivre,

$$z^5 = 4^5 \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = 4^5 \cdot \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 512 - i(512\sqrt{3})$$

▲

Exemplo 16. Se $z = 1$, determine $\sqrt[3]{z}$.

Solução. Nesse momento eu imagino que você deva estar pensando: *"Ué, isso não é óbvio? A raíz cúbica de 1 é o próprio 1"*. De fato, isso é verdade, mas essa não é a única raíz cúbica de 1.

Dito de outra maneira, existem outros números (complexos) que elevados ao cubo resultam em 1. Recorde-se que a segunda fórmula de Moivre garante que existem exatamente n raízes enésimas de z. Para calcular a raíz cúbica, primeiro passemos z para a sua forma polar:

$$z = 1 = 1 \cdot (\cos(2\pi) + i\sin(2\pi))$$

De acordo com a segunda fórmula de Moivre,

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

onde consideramos nos cálculos que $\sqrt[3]{\rho} = \sqrt[3]{1} = 1$ porque $\rho \in \mathbb{R}^+$. Agora, para encontrar as raízes cúbicas, lembramos que nesse caso $k \in \{0, 1, 2\}$ e avaliamos a expressão encontrada para cada valor de k, denominando as raízes de z_0, z_1 e z_2.

- k = 0

$$z_0 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- k = 1

$$z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- k = 2

$$z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) = 1$$

Uma interpretação geométrica para essas raízes é dada na Figura 17.

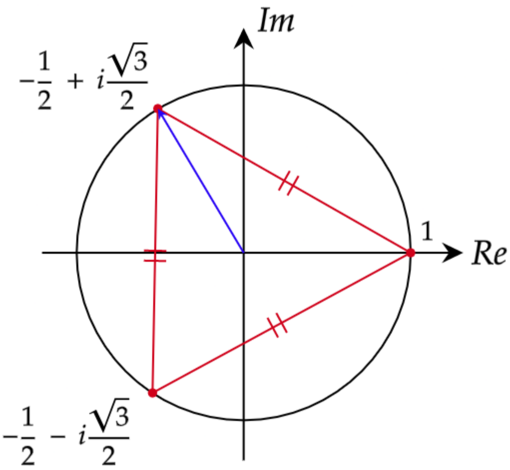


Figura 17: Interpretação geométrica das raízes de um número complexo. Observe que todas as raízes complexas possuem o mesmo módulo (nesse caso, $\sqrt[3]{1} = 1$), apenas variando o argumento, então são todas pontos de uma mesma circunferência no plano de Argand-Gauss. Dessa forma, ligando os pontos, definem um polígono regular inscrito na circunferência (neste caso um triângulo equilátero). De forma geral, as raízes enésimas de um complexo z serão os vértices de um polinômio regular inscrito numa circunferência de raio $\sqrt[n]{\rho}$.

▲

Além disso, um outro resultado referente aos números complexos que é fundamental para a física, talvez o mais importante, é a fórmula de Euler. Um desenvolvimento esclarecedor até chegar na demonstração dessa fórmula é fornecido em [10].

Fórmula de Euler

Teorema 17. *Dado o número complexo $z = \rho \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ e sendo "e" o número de Euler, vale*

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{3.10}$$

isto é,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{3.11}$$

□

Exemplo 18. Mostre que $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Solução. Sabemos que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, então

$$e^{i\pi} + 1 = \cos(\pi) + i\sin(\pi) + 1 = -1 + 1 = 0.$$

▲

Isso finaliza o que tínhamos que falar sobre números complexos. Agora, proponho que você resolva os exercícios a seguir para colocar em prática um pouco do que aprendeu nessa seção. Algumas são mais simples, outras vão exigir que você pense mais um pouco. Não desista e, caso precise de ajuda, converse com seus colegas ou comigo!

Exercício 16. Dado que $z = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, calcule quanto vale z^{100}. ★

Exercício 17. Coloque o número complexo $\dfrac{i}{\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6}$ na forma $a + ib$, com $a, b \in \mathbb{R}$. ★

Exercício 18. Usando a primeira fórmula de Moivre e o produto notável $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, expresse $\sin(2\theta)$ e $\cos(2\theta)$ em função de $\cos\theta$ e $\sin\theta$. ★

Exercício 19. Calcule as raízes cúbicas de $z = -11 - 2i$. ★

Exercício 20. Sendo $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ uma das raízes quartas de um número z, determinar as raízes quadradas de z. ★

Polinômios

4.1 Motivação

Essencialmente, o que vamos estudar de polinômios possui como objetivo se apropriar de algumas técnicas, identidades e conceitos que são importantes para a resolução de equações, cálculo de limites, derivadas e integrais. Fisicamente falando, além do fato de que a maior parte das grandezas físicas serem efetivamente funções polinomiais, não há tanto do que se vislumbrar acerca de polinômios — em resumo, estamos dedicando nosso tempo para aprender um pouco mais sobre polinômios porque será útil para fazer contas.

Figura 18: G. H. Hardy, um ilustre matemático inglês, costumava dizer que "A real matemática deve ser justificada como arte, se ela puder sequer ser justificada". É interessante que você compreenda que, algumas vezes, vamos dedicar tempo para aprender algumas coisas de matemática que nem sempre vão ficar claras de imediato como serão úteis — mas quando você finalmente utilizá-las, será grato por um dia ter parado para dedicar seu tempo a isso. Estudar matemática por razão de sua beleza torna esse processo um pouco menos doloroso.

4.2 O conceito de polinômio

Polinômios são expressões da seguinte forma:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{4.1}$$

onde $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ são coeficientes complexos. O termo com maior expoente é chamado de termo líder, e o valor deste expoente é chamado de grau do polinômio.

Teorema Fundamental da Álgebra

Teorema 19. *Todo polinômio $P(x)$ de grau n possui exatamente n raízes complexas.* □

Esse teorema é de grande relevância, porque sempre que olharmos para um polinômio sabemos exatamente qual a quantidade de raízes que ele possui. Se um polinômio tem grau n, podemos denotar suas raízes por $\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$.

4.3 Operações com polinômios

Dado um $P(x)$ como (4.1) e $Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ podemos somar e subtrair os polinômios de modo que o polinômio resultante $C(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ é tal que

$$c_i = a_i \pm b_i$$

onde o $\pm$ diz respeito a se os polinômios estão sendo somados ou subtraídos um do outro. Além disso, polinômios podem ser multiplicados através da propriedade distributiva do produto, e também divididos. Esta última operação é um pouco mais sutil, e existem métodos diferentes para realizar a divisão de dois polinômios. Ensinarei aqui o mais canônico, conhecido como *método das chaves* [5].

Essa é uma das coisas que são estupidamente melhores de serem compreendidas quando vistas em um exemplo, porque trata-se de um passo a passo. Consideremos primeiro um caso simples: dividir $(x^2 - 3x + 2)$ por $(x - 1)$. Começamos utilizando a notação a seguir.

$$x^2 - 3x + 2 \;\big|\underline{\; x - 1 \;}$$

Prosseguindo, dividimos o termo líder x^2 do dividendo pelo termo líder do divisor x, o que resulta em x. Colocamos esse resultado parcial no quociente, e ficamos com o seguinte:

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 3x + 2 & x - 1 \\ \cline{2-2} & x \end{array}$$

Agora, multiplicamos este resultado parcial por cada um dos termos do divisor, e vamos os colocando abaixo do polinômio do dividendo, porém com sinais trocados. Observe como fica na prática:

$$-x^2 + x$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 3x + 2 & x - 1 \\ \cline{2-2} -x^2 + x & x \end{array}$$

Dessa vez, somamos o polinômio do dividendo com o polinômio parcial obtido na operação anterior (de modo a cancelar os termos líder), e encontramos:

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 3x + 2 & x - 1 \\ \cline{2-2} -x^2 + x & x \\ \cline{1-1} -2x + 2 & \end{array}$$

Repetimos o procedimento de dividir o termo líder do novo polinômio parcial pelo termo líder do divisor, isto é, dividir $(-2x)$ por x, o que resulta em (-2). Portanto, colocando esse resultado no quociente, temos:

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 3x + 2 & x - 1 \\ \cline{2-2} -x^2 + x & x - 2 \\ \cline{1-1} -2x + 2 & \end{array}$$

Então, mais uma vez multiplicamos o quociente parcial mais recente (-2) por cada um dos termos do divisor, trocamos o sinal e vamos colocando abaixo do dividendo parcial, observe na figura abaixo:

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 3x + 2 & x - 1 \\ \cline{2-2} -x^2 + x & x - 2 \\ \cline{1-1} -2x + 2 & \\ 2x - 2 & \end{array}$$

Por fim, adicionamos e encontramos o resultado final:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^2 - 3x + 2 & x - 1 \\
\cline{3-3}
 & -x^2 + x & x - 2 \\
\cline{2-2}
 & -2x + 2 & \\
 & 2x - 2 & \\
\cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Note que nesse caso encontramos zero como resto (o que nem sempre será verdade), e como quociente encontramos $(x-2)$. Exatamente o mesmo *algoritmo* pode ser empregado para a divisão de quaisquer outros polinômios. Em geral, se houver um resto no final da conta (o que significa que apareceu algum polinômio de grau menor do que o divisor), então a divisão de um polinômio P por um polinômio D é escrita como

$$\frac{P}{D} = Q + \frac{R}{D}$$

onde Q é o quociente e R é o polinômio no resto que, como não pode ser dividido por D, fica como numerador da fração de forma explícita e irredutível.

Exercício 21. Dividindo o polinômio $p(x)$ por $x^2 - 3x + 5$ obtemos o quociente $x^2 + 1$ e resto $3x - 5$. Determine $p(x)$. ★

Exercício 22. Através do método das chaves, calcule o quociente e o resto (se tiver) da divisão de $3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1$ por $x^2 - 2x + 3$. ★

4.4 Fatorações

As fatorações dos polinômios são ferramentas que utilizaremos para simplificar e manipular expressões ao nosso favor. Essa talvez seja uma das aplicações mais usadas a respeito dos polinômios, é o que nos ajudará a calcular limites de funções polinômiais, racionais e radicais, além de ser uma técnica poderosa de se ter "na manga" durante a resolução de problemas em geral na física. Serão aqui apresentadas como identidades:

(i) $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$

(ii) $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3 = x^3 \pm y^3 + 3xy(y \pm x)$

(iii) $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

(iv) $x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp ab + b^2)$

(v) $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$.

Exercício 23. Mostre as identidades (i), (ii), (iii) e (iv). ★

Exercício 24. Mostre que $\dfrac{x^2-9}{x+3} = (x-3)$, para $x \neq -3$. ★

Exercício 25. Mostre que $\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x-3} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{9}}$, para $x \neq 3$. ★

Esses dois últimos exercícios, em particular, se revelarão muito úteis de se saber resolver (enquanto técnica) quando você estiver estudando limites — os mesmos métodos servirão lá na frente. Além disso, apesar de ser utilizado em casos mais específicos, também é importante conhecer o *binômio de Newton*:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (a^{n-p} b^p) \tag{4.2}$$

onde lembramos que $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ trata-se de uma *combinação simples*[4].

[4]Uma demonstração para o binômio de Newton e conceitualização da ideia de combinação simples é fornecida em [9].

Matrizes

5.1 Motivação

As matrizes compõem um ferramental matemático muito utilizado na física, desde situações mais simples como representar um vetor ou uma rotação de forma algébrica e viabilizar uma forma fácil para fazer operações com estes, até contextos mais complicados como a mecânica matricial de Heisenberg na Mecânica Quântica ou a descrição da formação de cristais na física do estado sólido.

Além disso, você usará ativamente as matrizes nas disciplinas de Geometria Analítica e Álgebra Linear, nesse começo de curso de graduação, e também mais para frente nas disciplinas que possuem Álgebra Linear como pré-requisito, portanto, ajuda muito entendê-las bem agora.

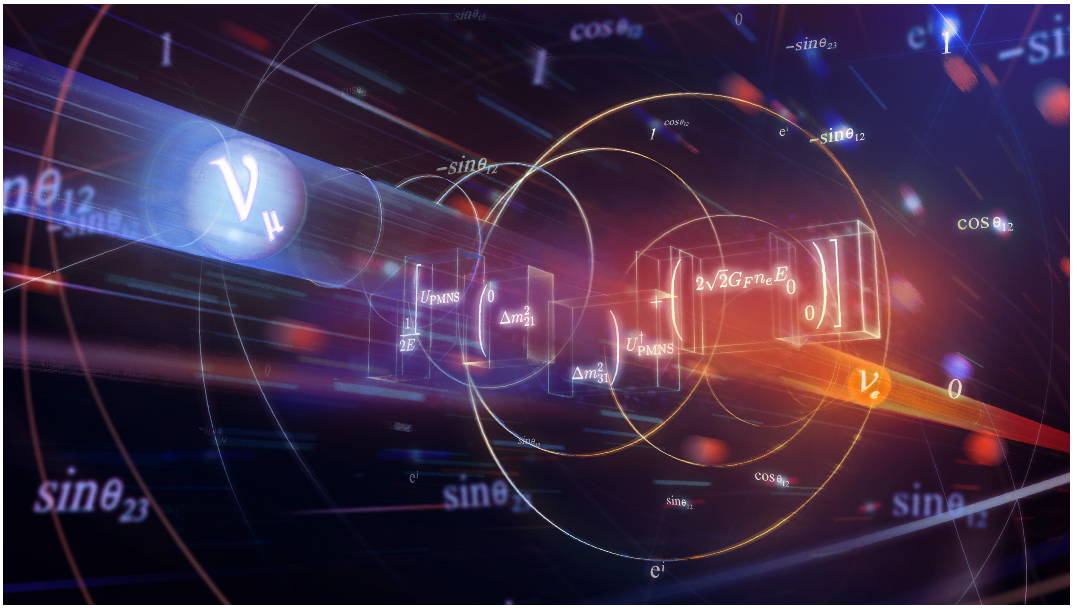


Figura 19: Matrizes ligadas a descrição da oscilação de neutrinos. Imagem: Maciej Rebisz.

5.2 A definição de matriz

Dados dois números naturais m e n, não nulos, chama-se *matriz m por n* (indica-se $m \times n$) toda tabela M formada por números complexos distribuídos em m linhas e n colunas. Exemplo de matriz 2×3:

$$M = \begin{bmatrix} i & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -i^3 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

Para cada matriz M de tamanho $m \times n$, podemos denotar as entradas da matriz como sendo a_{ij}, onde $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ e $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, de forma que as entradas são numeradas da seguinte maneira:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

Matrizes que possuem apenas uma linha são chamadas de *matriz linha* e matrizes que possuem apenas uma coluna são chamadas de *matriz coluna*. Além disso, matrizes em que a quantidade de linhas e colunas são iguais ($m = n$) são chamadas de matrizes quadradas. Observe os exemplos a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 15 \\ 21 \\ 27 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

em que A é uma matriz linha, B é uma matriz coluna e C é uma matriz quadrada. No que diz respeito às matrizes quadradas (que serão as mais utilizadas por nós), as entradas $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}$ definem o que chamamos de *diagonal principal*. Matrizes quadradas que possuem apenas zeros acima ou abaixo da diagonal principal são chamadas de triangulares, e no caso em que tanto em acima quanto abaixo haverem apenas zeros, elas serão chamadas de matrizes diagonais. Finalmente, matrizes cujas entradas são todas iguais a zero são chamadas de matrizes nulas.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 15 & 4 & 0 \\ 21 & 27 & 9 \end{bmatrix}, \ E = \begin{bmatrix} 1 & 15 & 21 \\ 0 & 4 & 27 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \ F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \ G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Conhecer a terminologia é importante porque esses casos especiais de matrizes possuem propriedades úteis que serão discutidas em breve, e conhecer a classificação das matrizes torna o discurso menos repetitivo, isto é, conseguimos transmitir a informação da aparência da matriz de forma mais objetiva.

5.3 Operações com matrizes

Podemos igualar, adicionar (soma e subtração), multiplicar por escalar, realizar o produto entre matrizes e tirar a transposta de matrizes. Além disso, também aprenderemos como encontrar o que definiremos por matriz inversa, caso ela exista (haverão condições especiais para que exista).

Em primeiro lugar, duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ são iguais se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i e j, isto é, todas as suas entradas forem iguais nas posições respectivas. Por essa razão, se escrevemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ y & 5 & 6 \\ 7 & z & 9 \end{bmatrix}$$

automaticamente podemos concluir que $x = 3, y = 4, z = 8$.

Exercício 26. Determinar x, y, z, t de modo que se tenha

$$\begin{bmatrix} x^2 & 2x & y \\ 4 & 5 & t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & 3 \\ z & 5t & t \end{bmatrix}$$

★

Adiante, duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ são somadas e resultam em $C = (c_{ij})_{m\times n}$ segundo a regra:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{5.3}$$

para todo i e j, isto é, a matriz resultante possui como entradas os números que são obtidos através da soma das entradas das matrizes que estão sendo somadas, nas posições respectivas. Dessa forma, escrevemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 15 & 21 & 27 \\ 7 & 14 & 49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+4 & 3+9 \\ 4+15 & 5+21 & 6+27 \\ 7+7 & 8+14 & 9+49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 19 & 26 & 33 \\ 14 & 22 & 58 \end{bmatrix}$$

onde enfatizo que duas matrizes só podem ser somadas se possuírem as mesmas "dimensões", e a matriz resultante possui as mesmas dimensões que as matrizes que estão sendo somadas. A adição de matrizes satisfaz:

Propriedades da adição de matrizes

(i) Associativa $(A + B) + C = A + (B + C)$.

(ii) Comutativa $A + B = B + A$.

(iii) Tem elemento neutro $\mathcal{O}_{m\times n}$ (matriz nula) tal que para toda matriz $(A)_{m\times n}$ temos $A + \mathcal{O} = A$.

(iv) Para toda matriz M, existe uma matriz oposta $-M$ tal que $M + (-M) = \mathcal{O}$.

Além disso, podemos multiplicar uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ por algum escalar complexo z, resultando em $B = (b_{ij})_{m\times n}$ tal que $b_{ij} = z \cdot a_{ij}$, isto é,

as entradas da matriz resultante são simplesmente as entradas da matriz original multiplicadas pelo escalar z.
A título de exemplo, temos

$$(1+i)\cdot\begin{bmatrix}1 & 1-i\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1(1+i) & (1-i)(1+i)\\ 0(1+i) & -1(1+i)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+i & 2\\ 0 & -1-i\end{bmatrix}$$

Ainda, o produto por escalar satisfaz:

Propriedades do produto por escalar

(i) $a\cdot(b\cdot A)=(ab)\cdot A$

(ii) $a\cdot(A+B)=a\cdot A+a\cdot B$

(iii) $(a+b)\cdot A=a\cdot A+b\cdot A$

(iv) $1\cdot A=A$

Exercício 27. Encontrar as matrizes X e Y que resolvem o sistema:

$$\begin{cases}X+Y=3A\\ X-Y=2B\end{cases}\tag{5.4}$$

onde $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & 0\end{bmatrix}$. ★

Uma outra operação entre matrizes que você usará com muita frequência é o produto, que é realizado entre duas matrizes por vez. Seja uma matriz $A=(a_{ij})_{m\times n}$ e $B=(b_{jk})_{n\times p}$, a matriz resultante do produto AB é dada por $C=(c_{ik})_{m\times p}$ tal que

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk},\quad \forall i\in\{1,2,\cdots,m\},\ k\in\{1,2,\cdots,p\}\tag{5.5}$$

Essa definição para o produto entre matrizes pode parecer um pouco arbitrária e talvez um tanto complicada, relativamente ao produto por escalar simples que estamos acostumados. Apesar disso, essa forma de definir o produto é muito útil, como verás ao longo do curso. Além disso, note pela definição que o produto entre duas matrizes só é possível caso a quantidade de colunas da primeira matriz seja igual a quantidade de linhas da segunda matriz e o tamanho da matriz resultante é tal que ela possui a mesma quantidade de linhas de A e a mesma quantidade de colunas de B. Ainda, existe uma forma mais tragável de enxergar o produto entre matrizes, mais visual, para você não ficar tão restrito com essa equação pouco clara.

Exemplo 20. Dadas as matrizes A e B abaixo, calcule AB.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

Solução. Como A tem tamanho 2×3 e B tem tamanho 3×1, então podemos multiplicar as matrizes e a matriz resultante C terá tamanho 2×1. Colocando uma matriz do lado da outra,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Para encontrar c_{11} multiplicamos os elementos da primeira linha de A com os elementos da primeira coluna de B, nas posições respectivas, e vamos somando, obtendo $c_{11} = 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 = 7 + 16 + 27 = 50$.

Analogamente, fazemos a segunda linha de A com a primeira linha de B para encontrar $c_{21} = 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 9 = 28 + 40 + 54 = 122$. Assim,

$$C = AB = \begin{bmatrix} 50 \\ 122 \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

▲

Exercício 28. Calcular os seguintes produtos:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

★

A multiplicação de matrizes goza de:

Propriedades da multiplicação entre matrizes

(i) Associativa (AB)C = A(BC), quaisquer que sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times p}$ e $C = (c_{kl})_{p\times r}$.

(ii) É distributiva à direita em relação à adição: $(A+B)C = AC + BC$ quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{jk})_{n\times n}$.

(iii) É distributiva em relação à esquerda: $C(A+B) = CA + CB$ quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{ki})_{p\times m}$.

(iv) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$ quaisquer que sejam o número k e as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times p}$.

É importante enfatizar aqui que o produto de matrizes, em geral, *não é comutativo*. Não podemos dizer que sempre será verdade que $AB \neq BA$ (de fato, será até um pouco raro). Com efeito, em alguns casos AB vai existir e BA nem sequer isso.

Podemos definir também o conceito de *matriz transposta*: dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se transposta de A a matriz $A^t = (a'_{ji})_{n\times m}$ tal que $a'_{ji} = a_{ij}$, para todo i e j. Isto é, as linhas de A são iguais as colunas de A^t.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

A operação de transposição satisfaz:

Propriedades da transposição de matrizes

(i) $(A^t)^t = A$ para toda matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$

(ii) Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, então $(A+B)^t = A^t + B^t$

(iii) Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $k \in \mathbb{R}$, então $(kA)^t = kA^t$

(iv) Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$, então $(AB)^t = B^t A^t$

Nota 5. Costumamos chamar, ainda, matrizes simétricas quando $A = A^t$ e antisimétricas quando $A = -A^t$. ♣

Por fim, conceitualizamos a ideia de *matriz inversa*. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A é uma matriz inversível se existir uma matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}_n$, onde $\mathbb{1}_n$ denota a matriz identidade de tamanho $n \times n$, isto é

$$\mathbb{1}_n \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

Nem toda as matrizes possuem inversa, nesses casos elas são chamadas simplesmente de *singulares*.

Exemplo 21. Qual é a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$?

Solução. Supondo que A^{-1} exista, escrevemos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

precisa ser tal que

$$A^{-1}A = \mathbb{1}_2 \implies \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 3a+5b & 7a+11b \\ 3c+5d & 7c+11d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

podemos então montar um sistema:

$$\begin{cases} 3a+5b = 1 \\ 7a+11b = 0 \\ 3c+5d = 0 \\ 7c+11d = 1 \end{cases} \implies a = -\frac{11}{2},\ b = \frac{7}{2},\ c = \frac{5}{2},\ d = -\frac{3}{2}$$

portanto, temos a matriz inversa de A:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

De fato, podemos checar que

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dfrac{11}{2} & \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{5}{2} & -\dfrac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1}_2$$

▲

A matriz inversa é um conceito importante porque quando você estiver estudando álgebra linear aprenderá que matrizes podem ser interpretadas como transformações lineares em vetores, e a matriz inversa basicamente é a transformação que "desfaz" a transformação primeira.

Em Vetores e Geometria Analítica você também verá que os vetores normalmente serão representados por matrizes linha ou matrizes coluna (a depender da convenção adotada pela literatura/professor, apesar desta última ser a mais comum). O produto escalar entre vetores poderá ser expresso como o produto da matriz que representa o primeiro pela matriz transposta que representa o segundo... acho que você conseguiu sentir um gostinho do porquê matrizes vão se tornar úteis em muito breve.

Era isso que precisávamos conversar de essencial a respeito de matrizes nesse minicurso, agora te encorajo a resolver alguns exercícios finais para colocar em prática o que você leu.

Exercício 29. Seja $A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \cos 2a \\ \sin 2a \end{bmatrix}$. Encontre a matriz X tal que $AX = B$. ★

Exercício 30. Determinar x, y e z de modo que a matriz A abaixo seja antissimétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ x & 0 & (1-z) \\ y & 2z & 0 \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

★

Exercício 31. Prove que se A, B e C são matrizes inversíveis de ordem n, então $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$. ★

Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral

6.1 Motivação

O Cálculo fornece o arsenal matemático mais utilizado pelos físicos (e desenvolvido por físicos, como Sir Isaac Newton[5]). Grandezas relevantes como a velocidade e a aceleração são definidas a partir de derivadas (da posição), equações diferenciais ordinárias e parciais (que são equações que envolvem derivadas) regem a dinâmica dos corpos, como o movimento de um foguete lançado da Terra até a Lua, dos fenômenos da natureza como a difusão de calor, a propagação de ondas eletromagnéticas, o comportamento de um fluido, a curvatura do espaço-tempo, as equações de onda da mecânica quântica, etc.

As integrais também são extremamente fundamentais, definem grandezas como o trabalho de uma força e o fluxo magnético, permitem calcular a massa de objetos simples e complexos a partir da sua densidade, distâncias entre eventos de espaços-tempos quaisquer, etc.

As ideias de limite e continuidade são necessárias para conseguirmos falar de derivadas e integrais, porque a rigor ambas são limites, e calcular limites de funções contínuas é uma beleza (embora continuidade não seja uma condição necessária para existência de limite).

A partir de certo ponto do formalismo, conseguimos encontrar resultados e regras "prontas", que nos permitem trabalhar com as derivadas e com as integrais sem precisar passar pelo caminho do limite todas as vezes, entretanto é fundamental ter em mente o que você está fazendo (tomando um limite), porque isso ajudará a identificar alguma situação em que você pode realizar uma integração, por exemplo, em contextos em que isso possa estar a priori oculto, além de influenciar na sua interpretação dos resultados.

Por essa razão, vamos iniciar a nossa introdução ao Cálculo através das ideias intuitivas de continuidade e de limite (entender do que se trata visualmente sem fazer muitas contas), depois vamos dar alguns passos à frente e discutir um pouco das suas definições precisas (adotando um pouco mais de rigor em prol de clareza), desmistificando o tabu que existe com os ϵ e δ (se você ainda não sabe o que é isso, não se preocupe, logo saberá), e então prosseguiremos para estudar um pouco a respeito das derivadas e das integrais, com o desenvolvimento matemático necessário e também várias aplicações físicas, para encerrar o minicurso da melhor forma o possível.

[5] De forma independente do matemático alemão Gottfried Leibniz, que também é um dos creditados pelo advento do Cálculo.

Figura 20: Retrato de Sir Isaac Newton, que realizou contribuições tão revolucionárias na física e mudou nosso paradigma de universo, também teve desenvolvimentos substanciais na matemática, em particular, no advento do Cálculo, o que já é contemplado no começo da sua obra mais conhecida, o "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica". Imagem: The Rockefeller University.

6.2 Ideia intuitiva de continuidade e limite

Por conta do significado literal das palavras (aquele que está no dicionário) talvez você possa adivinhar ou ter alguma noção do que queremos dizer com continuidade e limite.

Estudaremos a continuidade de funções. Isto lembra a palavra "continuar", o que significa que o conceito de continuidade provavelmente tem alguma relação com o comportamento que uma função tem de continuar a "ser o que é", sem se transformar em outra coisa, sem apresentar quebras, saltos, indefinições, tendências ilimitadas, situações nesse sentido. Isso é algo mais facilmente compreendido de forma visual, observe a Figura 21.

Além disso, é necessário ter em mente que o conceito de continuidade é algo *local*, no sentido de que avaliamos a continuidade de uma função *em um ponto particular do seu domínio*. Se por acaso for possível mostrar que a função é contínua em todos os pontos do seu domínio, dizemos que simplesmente *a função é contínua*. Por outro lado, se em apenas um ponto ou em uma coleção de pontos do seu domínio a função apresentar *descontinuidades*, isso não impede que em outros locais ela seja contínua.

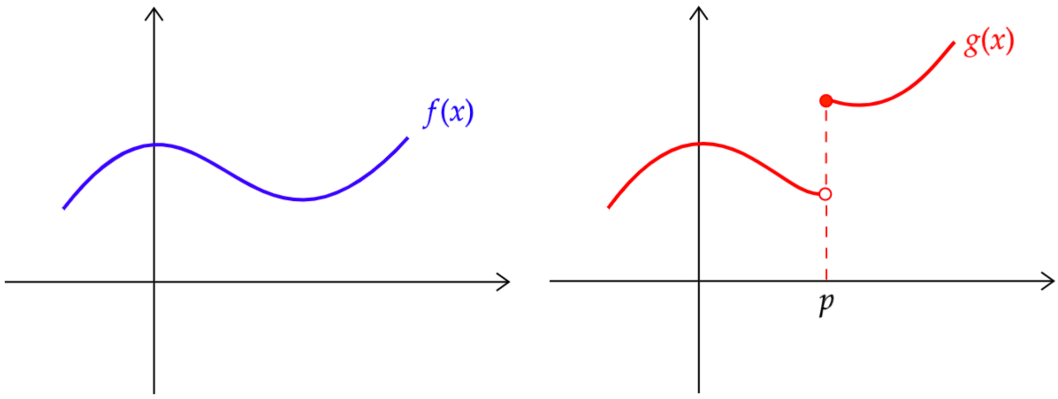


Figura 21: Gráfico de duas funções arbitrárias. Observe que a função $f(x)$ exibe um comportamento que remete a ideia intuitiva de continuidade: ela não apresenta quebras, saltos, etc, apenas continua "sendo o que é". Por outro lado, a função $g(x)$ apresenta um "salto" em um ponto especial do seu domínio, o p: uma quebra na sua continuidade.

Na Figura 21, por exemplo, podemos perceber que $g(x)$ é descontínua em p por apresentar um salto nesse ponto, mas em todos os outros pontos do seu domínio ela simplesmente continua "sendo o que é", então ela é contínua para todo x pertencente ao seu domínio com exceção de p. Na Figura 22, exibo outros casos muito comuns de descontinuidades, para você ficar visualmente atento.

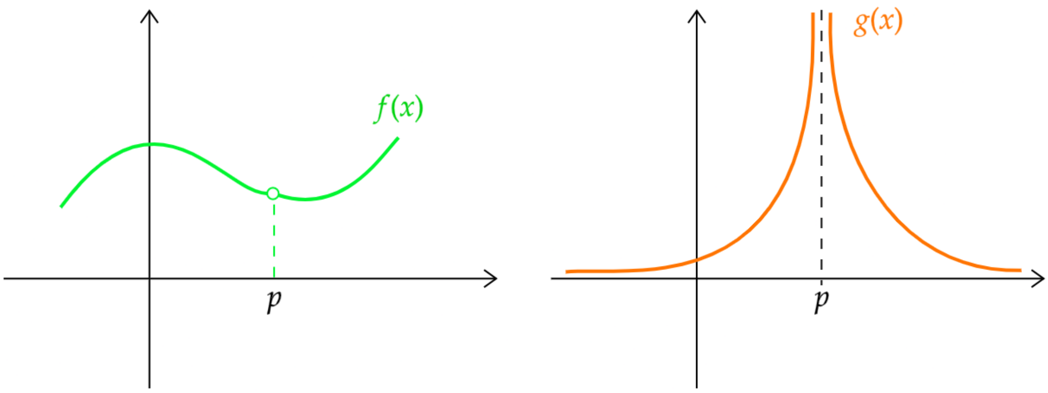


Figura 22: Gráfico de duas funções arbitrárias. Observe que a função $f(x)$ não está definida no ponto p, portanto é descontínua em p (nesse ponto, ela deixa de ser o que estava sendo). Além disso, a função $g(x)$ possui um comportamento "explosivo" em p, tende ao infinito, torna-se ilimitada, então é descontínua em p (a função se torna inalcançável, perde-se o sentido em tentar estudar sua continuidade, há uma quebra aparente).

Ademais, a palavra limite remete a algo que possui um fim único e bem definido, não é infinito, como o limite da fronteira entre o Brasil e a Argentina. De certa forma, essa noção também nos ajudará a compreender os limites, mas não é só isso. Lembremos que estaremos calculando limites de funções. Efetivamente, estaremos avaliando *tendências*, no sentido de que calcularemos para que valor L do seu contradomínio a função $f(x)$ está tendendo conforme o número x percorre o seu domínio em direção a algum valor p. Na prática, escrevemos de acordo com a notação convencional vide [7]:

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \tag{6.1}$$

e lê-se da forma: "o limite de $f(x)$ conforme x tende a p é L". Pensando em uma situação mais aplicada para conseguirmos visualizar, vamos estudar o limite da função $f(x) = x^2$, conforme x tende a 2. Observe a Figura 23:

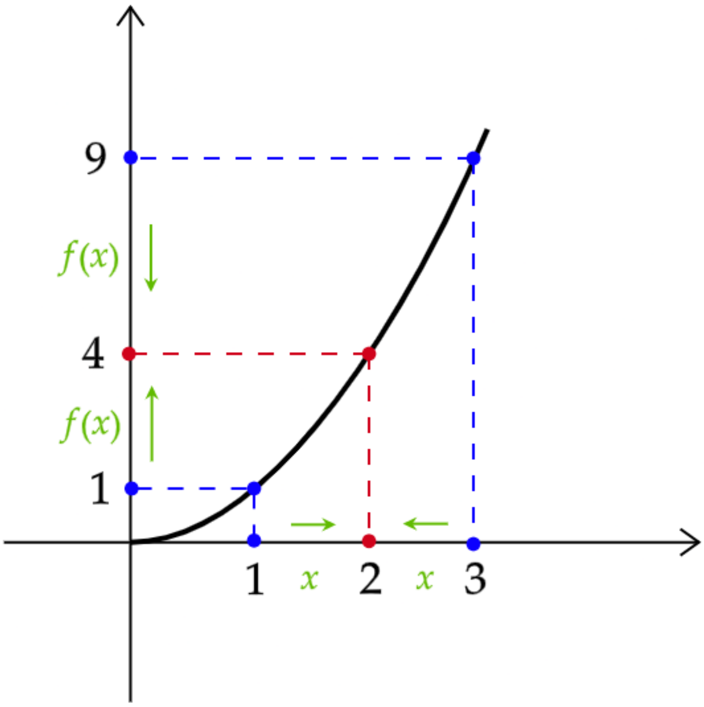


Figura 23: Limite da função quadrática conforme x tende a 2. Observe que, em verde, a tendência em direção ao 2 no domínio, tanto pela direita quanto pela esquerda, implica numa tendência em direção a 4 no contradomínio, tanto por cima quanto por baixo, que é identicamente igual a $f(2) = 2^2 = 4$.

De acordo com o que a Figura 23 exibe e a legenda explica o que está acontecendo, podemos perceber que conforme x percorre o domínio, por consequência o mesmo acontecerá com $f(x)$ no contradomínio, e quando fazemos x tender a um ponto p em especial, $f(x)$ parece tender a $f(p)$. Com efeito, é assim que calculamos limites dado que a função $f(x)$ que estamos trabalhando é *contínua no ponto p*. Nesses casos, escrevemos simplesmente que

$$\lim_{x\to p} f(x) = f(p) \tag{6.2}$$

Em geral, se a função não for contínua no ponto p, não poderemos dizer que o limite será $f(p)$, embora possa existir um limite $L \neq f(p)$, isto é, *a função pode ser descontínua em p mas possuir limite em p*. Para visualizar isso, considere as funções da Figura 24:

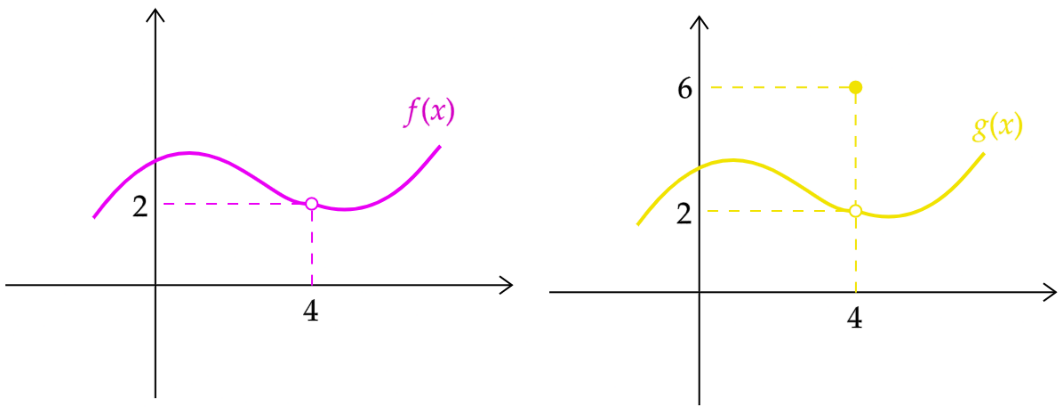


Figura 24: Gráfico de duas funções arbitrárias. Observe que $f(x)$ é descontínua em $x = 4$ porque não está definida nesse ponto, entretanto conforme nos aproximamos de $x = 4$ pela esquerda e pela direita, a função vai se aproximando cada vez mais de $f(x) = 2$. Com efeito, o limite L de $f(x)$ quando x tende a 4 é 2. Já no caso da função $g(x)$ ocorre algo muito parecido, com a diferença de que apesar da função continuar com uma descontinuidade em $x = 4$, dessa vez ela está definida no ponto, isto é, $f(4) = 6$, como mostra o gráfico. Porém, o limite L da função $g(x)$ conforme x tende a 4 continua sendo 2. Note que $L \neq f(4) = 6$.

Exercício 32. Defina o conceito de continuidade e de limite, com suas próprias palavras, da forma mais simples que puder (como se tivesse explicando pra outra pessoa que não sabe tanto de matemática). ★

Exercício 33. Esboçe o gráfico das funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^3$ em seu caderno, destacando alguns pontos, no intervalo $-2 \leq x \leq 3$. Sem fazer contas, apenas visualizando os gráficos, determine o limite de $f(x)$ e de $g(x)$ conforme x tende a 2, e justifique com suas próprias palavras usando as ideias intuitivas que desenvolvemos até agora. ★

6.3 Desmistificando os ϵ e δ

Agora que compreendemos melhor as noções intuitivas de continuidade e limite, chegou a hora de darmos definições mais precisas pra esses conceitos, porque nem sempre a intuição vai bastar para resolvermos problemas mais complicados de matemática.

A forma como isso vai funcionar é a seguinte: eu vou enunciar o conceito, da forma mais precisa que eu puder, e logo depois vou dar explicações que tentem simplificar um pouco a linguagem abstrata, além de fornecer exemplos para você visualizar como usar essas definições rigorosas. No fundo, conseguir desenvolver essas coisas depende de técnicas, e técnicas são dominadas com a prática.

No começo pode ser um pouco doloroso, e difícil de deglutir o abstrato (o que origina esse tabu de dificuldade em torno do formalismo dos ϵ e δ), mas no seu tempo você vai pegando o jeito (confie nas palavras de quem já passou por exatamente a mesma coisa).

Nota 6. A menos que contrariamente explicitado, todas as constantes enunciadas são constantes *reais*. Então, por exemplo, se dizemos "considere um $\epsilon > 0$", automaticamente deduz-se que estamos nos referindo a todos os números *reais* maiores do que zero. ♣

Continuidade em um ponto

Definição 22. Uma função $f(x)$ é dita contínua em um ponto $p \in D_f$ se, e somente se, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, existe pelo menos um $\delta > 0$ (onde δ é uma função de ϵ), tal que, $\forall x \in D_f$, **SE**

$$p - \delta < x < p + \delta \tag{6.3}$$

ENTÃO, consequentemente, será verdade que

$$f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon \tag{6.4}$$

♠

Lembramos que em inequações modulares, vale a propriedade da eq. (1.9), então

$$p - \delta < x < p + \delta \implies (p - \delta) - p < x - p < (p + \delta) - p$$
$$\implies -\delta < x - p < \delta \implies |x - p| < \delta$$

Analogamente,

$$f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon \implies |f(x) - f(p)| < \epsilon$$

Assim, podemos sintetizar as duas últimas etapas da definição em uma única linha, a custo de se tornar um pouco mais abstrato:

$$|x-p| < \delta \implies |f(x) - f(p)| < \epsilon \tag{6.5}$$

De toda a forma, essa geralmente será a forma matematicamente mais conveniente de conduzir os cálculos, será suficiente mostrá-la (dentro das condições da definição), para provar que uma função $f(x)$ é contínua em um ponto p do seu domínio.

Apresento, ainda, uma forma alternativa de definir a continuidade, vide [2], para clarificar caso alguém ainda não tenha entendido: uma $f(x)$ é contínua em um ponto p do seu domínio se ela satisfaz em p a propriedade de que para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ (δ dependendo de ϵ), tal que $f(x)$ permanece entre $f(p) - \epsilon$ e $f(p) + \epsilon$ quando x percorre o intervalo $]p-\delta, p+\delta[$, com x no domínio de f.

Agora, vamos tentar visualizar como essa definição funciona na prática. Irei exibir o gráfico de uma função que sabemos ser contínua e uma função que sabemos ser descontínua em um ponto p (intuitivamente já somos capazes de enxergar isso), e a partir delas vamos entender como a definição precisa de continuidade se aplica.

Você pode estar se perguntando: "por que eu perderia meu tempo estudando a continuidade de uma função de forma rigorosa sendo que eu sou capaz de verificar usando apenas intuição?". É uma pergunta justa, e eu retribuo com uma resposta justa à altura: porque nem sempre você vai ter o gráfico da função pra te auxiliar, às vezes é algo muito difícil de esboçar, e você vai acabar precisando demonstrar analiticamente se uma função é contínua ou não. Para conseguir desenvolver nesses casos mais complicados, você precisa primeiro ir pegando o jeito com os casos mais simples.

Considere a função definida por $f(x) = x$. Observe o seu gráfico na Figura 25.

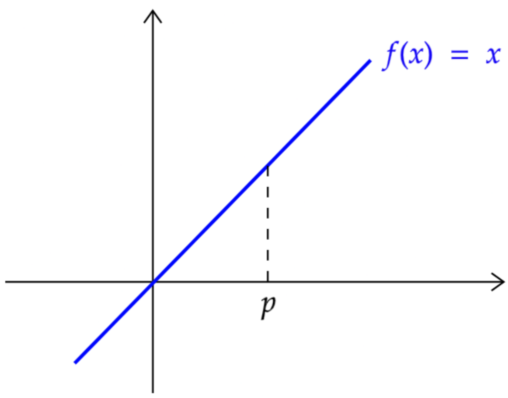


Figura 25: Gráfico da função $f(x) = x$.

Vamos estudar a continuidade dessa função no ponto p. Para isso, vamos tomar um $\epsilon > 0$ qualquer. Queremos achar algum $\delta > 0$ tal que $\forall x \in D_f$ tenhamos $|x - p| < \delta \implies |f(x) - f(p)| < \epsilon$. Em primeiro lugar, vamos destacar no nosso gráfico os pontos $f(p) - \epsilon$, $f(p)$ e $f(p) + \epsilon$, no eixo das ordenadas. Observe a Figura 26.

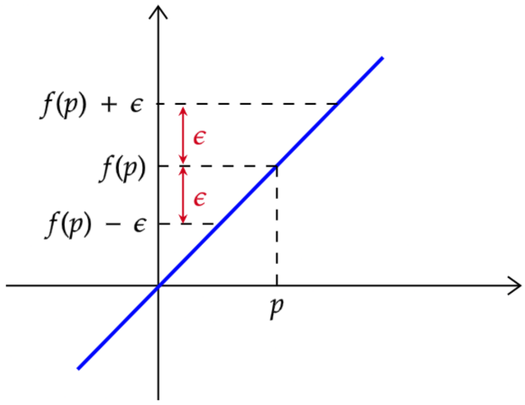


Figura 26: Destacamos os pontos de interesse no eixo das ordenadas.

Agora, nos guiando pela figura, é possível escolher um δ tal que, $\forall x \in D_f$, caso tenhamos $|x - p| < \delta$, isto é, a distância de x até p for menor do que o meu δ escolhido, automaticamente isso irá significar que $|f(x) - f(p)| < \epsilon$, isto é, a distância de $f(x)$ até $f(p)$ será menor do que ϵ. A título de exemplo, um possível δ é destacado na Figura 27.

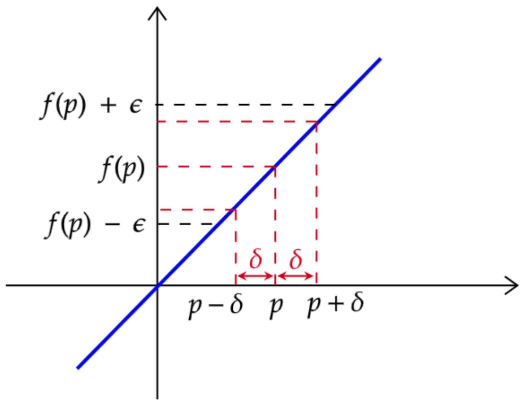


Figura 27: Destacamos os pontos de interesse no eixo das abscissas.

Apesar de a rigor precisar valer $\forall x \in D_f$, vamos primeiro nos contentarmos em verificar se a condição de continuidade está sendo satisfeita para um x_0 particular, com distância até p menor do que δ, ou seja, vamos ver se para esse x_0 haverá a implicação de que a distância de $f(x_0)$ até $f(p)$ será menor do que ϵ. Confira na Figura 28.

Visualmente, podemos perceber que a distância de x_0 até p é menor que δ, e de fato a distância entre $f(x_0)$ e $f(p)$ é menor do que ϵ (observe que a distância entre a linha tracejada em verde até a linha central tracejada

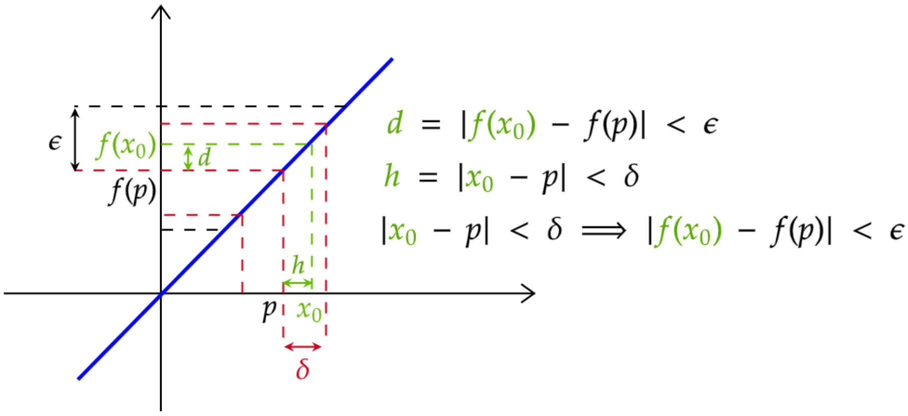


Figura 28: Destacamos os pontos de interesse em ambos os eixos.

em vermelho é menor do que a distância entre a linha central tracejada em vermelho até a linha superior tracejada em preto, que no eixo das ordenadas tem justamente tamanho ϵ). Se necessário, dê um Zoom na Figura 28 e encare-a por algum tempo, logo você se convencerá que, visualmente, o que acabo de falar é verdade.

Acontece que a condição desejada ter funcionado para um x_0 em particular não é suficiente para provar que $f(x) = x$ é contínua em p, teríamos que mostrar que dado um $\epsilon > 0$ e um $\delta > 0$ isso funcionaria $\forall x \in D_f$.

De toda a forma, para o ϵ e o δ escolhidos para ilustrar a Figura, tente se convencer visualmente que a condição $|x - p| < \delta \implies |f(x) - f(p)| < \epsilon$ (talvez fazendo outros desenhos similares aos que eu fiz, mas escolhendo outros números no lugar do x_0 que eu escolhi para exemplificar) é satisfeita $\forall x \in D_f$.

A essa altura você já deve ter percebido que não será praticável ficar fazendo desenhos o tempo inteiro para provar a continuidade de uma função em um ponto de forma rigorosa. Os desenhos ajudam a visualizar e a perceber como as coisas realmente dão certo conforme escolhemos situações particulares.

Se desejamos empregar a demonstração efetivamente, recorremos ao método analítico: considere um $\epsilon > 0$ qualquer, e tome, por exemplo, $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Nesse caso, sendo $x \in D_f$, se $|x - p| < \delta \implies |x - p| < \dfrac{\epsilon}{2} \implies 2|x - p| < \epsilon$, mas como $f(x) = x$, então $f(p) = p$, e portanto $|x - p| = |f(x) - f(p)|$, daí segue que $|f(x) - f(p)| < 2|f(x) - f(p)| < \epsilon \implies |f(x) - f(p)| < \epsilon$, como queríamos demonstrar.

Observe que em nenhum momento eu fiz menções a números x "particulares", eu mostrei que para um x qualquer pertencente ao domínio da função, a desigualdade que define a continuidade valia, para qualquer ϵ que me fosse dado, contanto que eu tomasse o meu $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Note que a definição de continuidade exige *pelo menos um* δ, para cada ϵ dado, que torne a condição verdadeira, o que não impede a existência de outros δ. Agora é a sua vez de mostrar a continuidade da função no ponto através de outros δ, resolva os exercícios a seguir:

Exercício 34. De forma completamente análoga ao desenvolvimento feito nos últimos parágrafos, procure, com suas próprias palavras, mostrar que $f(x) = x$ é contínua em um ponto p qualquer do seu domínio, através da escolha de $\delta = \frac{\epsilon}{3}$, para um dado ϵ. ★

Exercício 35. Faça a mesma coisa que o exercício anterior, mas agora tomando um $\delta = \frac{\epsilon}{n}$, com $\forall n \in \mathbb{R}^+$. Pense um pouco no por quê de isso funcionar. ★

Como nós mostramos que a função $f(x) = x$ é contínua para um ponto p qualquer do seu domínio, dizemos a função como um todo é simplesmente *contínua* (promovemos o conceito que era local para um status global, depois de ser devidamente demonstrado).

Agora, vamos olhar um exemplo para uma função que não seja contínua em algum ponto do seu domínio. Dessa vez, como você já está mais experiente (baseado no meu desenvolvimento anterior e na sua solução dos exercícios), vamos prosseguir em um ritmo um pouco mais veloz. Considere a função $g(x)$ definida da seguinte forma:

$$g(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \leq 2 \\ x + 1, & \text{se } x > 2 \end{cases} \tag{6.6}$$

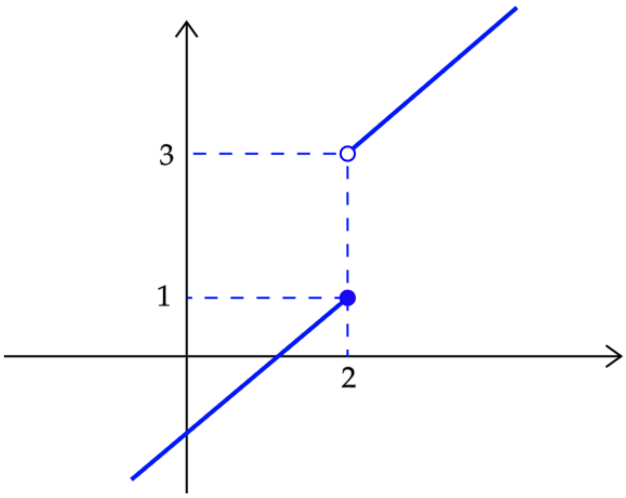


Figura 29: Gráfico da função $g(x)$, definida por casos.

No gráfico da Figura 29, podemos perceber que ocorre um dos casos de descontinuidade que discutimos na seção 5.2: um salto, em $x = 2$. Vamos ver agora, de forma mais rigorosa, o porquê disso implicar em uma violação da definição de continuidade em um ponto. Para isso, lembremos que a condição

$$|x-p|<\delta \implies |f(x)-f(p)|<\epsilon$$

Precisa valer para qualquer que seja o $\epsilon>0$ dado. Porém, se escolhermos um $\epsilon<3-1=2$, ou seja, menor do que a distância entre os pontos do salto, não será possível encontrar nenhum δ que satisfaça a condição que estamos tentando provar. Como exemplo, vamos tomar $\epsilon=1$. Observe na Figura 30 a demarcação do ϵ no eixo das ordenadas.

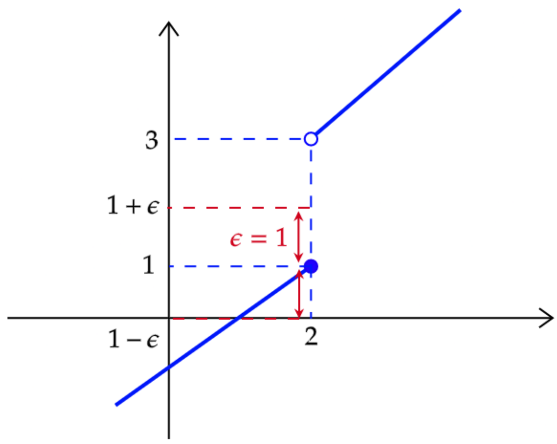


Figura 30: Exemplo escolhido para mostrar que a continuidade é violada em $x=2$, tomando, neste caso, $\epsilon=1$.

Agora, vamos considerar um δ tão pequeno quanto se queira (para tentar encurralar $f(x)$ e $f(2)=1$ em uma distância menor do que ϵ), observe a Figura 31.

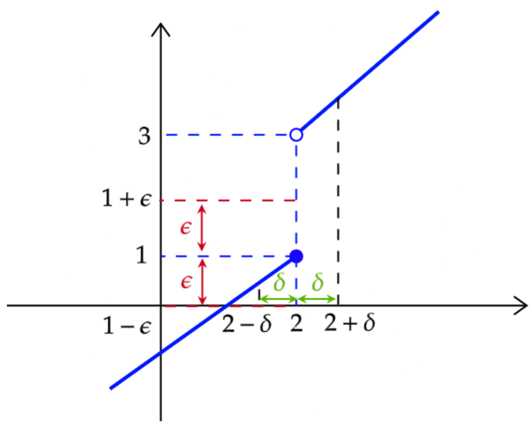


Figura 31: Exemplo escolhido para mostrar que a continuidade é violada em $x=2$, tomando, neste caso, $\delta=0,5$.

Porém, note que não importa quão pequeno seja a escolha do seu δ, não será todo $x \in D_g$ que está no intervalo $]2-\delta, 2+\delta[$ que irá fazer com que $|x-2| < \delta \implies |f(x) - f(2)| < \epsilon$. Com efeito, qualquer x_0 que você escolha no intervalo $]2-\delta, 2]$ vai funcionar, mas nenhum x_1 que você escolher no intervalo $]2, 2+\delta[$ vai funcionar. Observe a Figura 32 para visualizar.

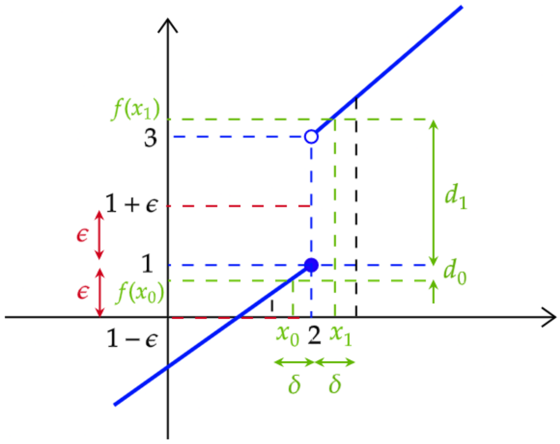


Figura 32: Destacamos as distâncias importantes para a análise da continuidade.

Note, finalmente, que para todo x_0 e x_1 nas condições explicadas do último parágrafo, teremos que $d_0 = |f(x_0) - f(2)| < \epsilon$, contudo, $d_1 = |f(x_1) - f(2)| > \epsilon$, o que viola diretamente a condição de continuidade (deveria ser menor do que ϵ). Encarar um pouco as figuras e reler os meus argumentos te fará se convencer, ao menos visualmente, que o que estou afirmando é verdadeiro, o que já é um progresso. Como sempre, se guiar através de gráficos nem sempre será a melhor maneira de proceder, então a seguir demonstro a descontinuidade de $g(x)$ em $x = 2$ de forma mais rigorosa.

Como a definição precisa funcionar para qualquer que seja o $\epsilon > 0$ dado, basta encontrar um em que ela falhe e portanto a função será descontínua no ponto. Dessa forma, vamos tomar $\epsilon = 1$, e tomar um $\delta > 0$ qualquer.

No intervalo $2 < x < 2+\delta$, pela definição temos $g(x) = x+1$, o que significa que $|g(x) - g(2)| = |x+1-1| = |x|$. Para que a função seja contínua em $x = 2$, precisaríamos que, $\forall x \in D_g, \exists \delta > 0$ tal que se $|x-2| < \delta$ então $|g(x) - g(2)| < \epsilon$. Porém, acabamos de ver que $|g(x) - g(2)| = |x|$ em $2 < x < 2+\delta$ (que é um intervalo em que a distância de x até 2 é menor do que δ). Note que é impossível eu ter $|g(x) - g(2)| < \epsilon$, ou seja, $|x| < 1$, ao mesmo tempo em que x se encontra em $2 < x < 2+\delta$.

Em outras palavras, a interseção $]-1, 1[\bigcap]2, 2+\delta[= \emptyset$, não existem valores de x que satisfaçam a condição. A definição de continuidade exige que isso funcionasse $\forall x \in D_g$, considerando que $|x-2| < \delta$. No entanto, apesar de estarmos dentro do intervalo $]2-\delta, 2+\delta[$, a condição não foi satisfeita para alguns valores de x, em particular, aqueles que estão dentro de $]2, 2+\delta[$. Como provamos que isso acontece $\forall \delta > 0$, então $g(x)$ é descontínua em $x = 2$.

Toda essa cuidadosa discussão até agora foi feita para "dissecar" a definição de continuidade, abri-la em detalhes e tentar visualizar melhor como ela funciona. Em tese, você pode não precisar desse caminho todo, talvez você seja mais astuto do que eu e simplesmente lendo a definição rigorosa já consiga entender o que ela quis dizer. Entretanto, meu objetivo aqui é fazer com que qualquer tipo de leitor que esteja entrando no curso de física consiga entender, e espero que a missão tenha sido cumprida até então.

Exercício 36. Defina continuidade de forma rigorosa, tentando o máximo possível usar as suas próprias palavras, ou o que você julgar ser conveniente. ★

Exercício 37. Mostre que as funções $f(x) = k$, com $k \in \mathbb{R}$ e $g(x) = x^2$ são contínuas. ★

Limite de uma função

Definição 23. Uma função $f(x)$ tem limite L em p se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ dado, $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in D_f$, **SE**

$$0 < |x - p| < \delta \tag{6.7}$$

ENTÃO, consequentemente, será verdade que

$$|f(x) - L| < \epsilon \tag{6.8}$$

nesse caso, escrevemos

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \tag{6.9}$$

♠

A primeira coisa que você pode perceber é que a definição de limite lembra muito a definição de continuidade, são muito parecidas. De fato, como veremos adiante, se uma função for contínua será particularmente simples calcular o seu limite. No entanto, reconheça uma diferença crucial na definição de ambos os conceitos: para que exista o limite de uma função em um ponto p, não é necessário que esta esteja definida no ponto p, isto é, *a existência do limite no ponto independe da continuidade no ponto*! Dito de outra maneira, a continuidade implica na existência do limite, mas a existência do limite não implica na continuidade.

O que suporta essa minha afirmação é o fato de que na definição de limite, pensamos em $0 < |x - p| < \delta$, nesse caso observe que a distância entre x e p é estritamente maior do que zero, o que significa que para existir o limite eu não preciso ter informação a respeito do valor da função no ponto p (o valor não precisa sequer existir), mas contanto que todos os outros pontos, arbitrariamente próximos de p, satisfaçam a condição, o limite existirá.

Apresento, ainda, uma definição alternativa de limite, vide [11], para dar uma luz para quem ainda não entendeu das outras formas que eu expliquei: considere uma função $f(x)$ definida no domínio $x_1 < x < x_0$ e $x_0 < x < x_2$ (não precisando, portanto, estar definida no ponto x_0). A função f se aproxima do limite L próximo de x_0 ($\lim_{x\to x_0} f(x) = L$) se para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$, se $0 < |x - x_0| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Exercício 38. Mostre (usando a definição rigorosa de limite via ϵ e δ) que:

$$\lim_{x\to 1} 2x + 1 = 3$$

. ★

Ademais, comparando as definições de continuidade e de limite, podemos concluir que no caso em que a função é contínua em p, vale

$$\lim_{x\to p} f(x) = f(p) \tag{6.10}$$

isso será uma forma conveniente de calcular limites de funções contínuas e também uma condição necessária e suficiente para mostrar a continuidade de uma função em um ponto p. Quero dizer, $f(x)$ é contínua em p $\iff \lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

Exemplo 24. Determine, caso exista, o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Solução. Esse é um tipo de limite extremamente clássico na literatura. Você pode ficar tentado a usar a regra da função contínua que acabamos de aprender, mas observe que em $x = 1$ há uma descontinuidade, pois se o denominador de uma fração tende a zero, esta fração tenderá ao infinito.

Então, como a regra da função contínua não funciona, você pode ficar tentado a recorrer à forma rigorosa de calcular os limites pela definição, o que é plenamente possível, porém bem mais trabalhoso do que o caminho que irei te propor agora. Lembre-se que para a existência do limite, a função não precisa estar definida no ponto, e que a ideia de *tendência* significa tão próximo quanto se queira mas não exatamente o ponto. Estou argumentando isso porque faremos a seguinte manipulação:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = (x+1)$$

E só pudemos cancelar os $(x - 1)$ no numerador e no denominador porque esse termo não é zero (seria zero se estivéssemos avaliando a função exatamente em $x = 1$, o que não é o caso, para o cálculo do limite apenas chegamos tão perto quanto se queira do ponto). Assim,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1$$

Maravilha! Agora estamos diante do limite de uma função que é contínua, então podemos fazer simplesmente

$$\lim_{x\to 1} x+1 = 1+1 = 2$$

▲

De forma geral, alguns limites vão parecer inexistentes (por conta dessas tendências ao infinito e coisas assim), mas após algumas manipulações e fatorações você consegue reduzir a expressão pra uma função contínua conhecida ou para algum limite fundamental.

Propriedades dos Limites

Se $\lim_{x\to p} f(x)$ e $\lim_{x\to p} g(x)$ existem e $k \in \mathbb{R}$, então:

(i) O limite da soma é a soma dos limites

$$\lim_{x\to p} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to p} f(x) + \lim_{x\to p} g(x)$$

(ii) O limite do produto por escalar é o produto do escalar pelo limite

$$\lim_{x\to p} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x\to p} f(x)$$

(iii) O limite do produto é o produto dos limites

$$\lim_{x\to p} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to p} f(x) \cdot \lim_{x\to p} g(x)$$

(iv) O limite da razão é a razão dos limites (se o limite do denominador for não-nulo)

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to p} f(x)}{\lim_{x\to p} g(x)}, \quad \lim_{x\to p} g(x) \neq 0$$

Limites Fundamentais

(i) Limites Trigonométricos: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x} = 0$

(ii) Número de Euler: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

(iii) Logaritmo Natural: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$

Apesar de ainda existir bastante assunto para se falar sobre limites, depois dessas duas etapas (noções intuitivas e desenvolvimento rigoroso) a respeito da continuidade e dos limites, eu acredito que você já deve ser capaz de escolher alguns livros (consulte a Bibliografia no final para pegar algumas indicações) e caminhar com as próprias pernas (as discussões posteriores que aparecem nos livros vão ser todas aplicações das definições que vimos aqui com tanto cuidado).

Portanto, encerro esse tópico com alguns exercícios que proponho você fazer para colocar em prática suas habilidades com os limites.

Exercício 39. Determine, caso existam, os seguintes limites

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-1}{2x-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{2}}{x-2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}$

(e) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$

(f) $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}$ onde $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(g) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ onde $f(x) = x^2 - 3x$

★

6.4 Derivadas

O conceito de derivada não é tão intuitivo de se imaginar ou sequer tentar adivinhar, como construímos pacientemente quando estávamos falando de continuidade e de limites. Ele surge a partir do seguinte experimento mental: o coeficiente angular da reta tangente (sua taxa de variação) a um gráfico em um ponto particular $P_0 = (x_0, f(x_0))$ pode ser obtido tomando-se o limite do coeficiente angular da reta secante que passa por P_0 e por um outro ponto P_1, quando P_1 tende a P_0. Vamos visualizar o porquê disso fazer sentido, observe a Figura 33.

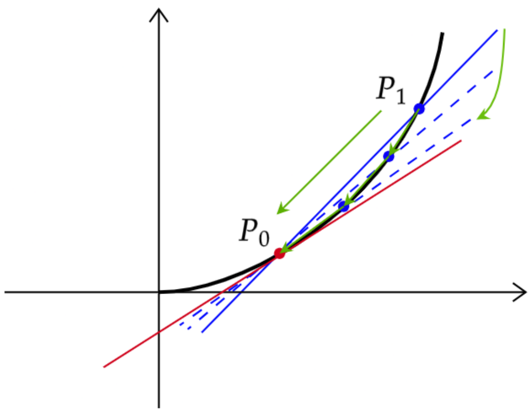


Figura 33: Esboço das retas tangente e secante discutidas no parágrafo anterior. Procurei usar as setas verdes para indicar o comportamento de "tendência" que expressaremos analiticamente com o limite daqui a pouco. Observe como fazer P_1 tender a P_0 aproxima a reta tangente através da reta secante.

O coeficiente angular da reta secante que passa por $(x_0, f(x_0))$ e por um ponto $(x, f(x))$ qualquer, posterior a x_0, é dado por

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{6.11}$$

Denotando $(x - x_0) = h$, podemos reescrever da maneira seguinte:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{6.12}$$

Note que fazer P_1 tender a P_0 é equivalente a fazer $x \to x_0$, ou ainda $h \to 0$. Dessa forma, conseguimos escrever a expressão exata para a derivada através de um limite. Ela é justamente o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico, no ponto de interesse. Por conta da definição de coeficiente angular, também podemos interpretá-la como taxa de variação instantânea da função (o quanto y varia para uma variação arbitrariamente pequena de x, em torno do ponto de interesse). Finalmente, definimos a derivada da maneira seguinte:

A derivada como um limite

Definição 25. A derivada de uma função $f(x)$ avaliada no ponto x_0 é dada por

$$f'(x_0) \equiv \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} \equiv \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{6.13}$$

No caso em que esse limite existe, a função é dita *diferenciável* no ponto x_0. ♠

Portanto, se você sabe calcular limites você também saberá calcular derivadas. Vamos ver alguns exemplos agora.

Exemplo 26. Calcule a derivada de $f(x) = x^2$ em um ponto x_0 qualquer.

Solução. Pela definição de derivada, temos

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x_0 + h = 2x_0 \end{aligned}$$

▲

Exemplo 27. Calcule a derivada de $f(x) = \sin(x)$ em um ponto x_0 qualquer.

Solução. Pela definição de derivada, temos

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \sin(h)\cos(x_0) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)\cos(x_0)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)(1-\cos(h))}{h} \\ &= \cos(x_0) \cancelto{1}{\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}} - \sin(x_0) \cancelto{0}{\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h)}{h}} \\ &= \cos(x_0) \end{aligned}$$

▲

Agora, tente calcular algumas derivadas você mesmo, através da definição. Geralmente vai demandar alguma técnica (como uma fatoração), uso de alguma identidade, propriedade da algumas funções, e coisas assim, para ir desenvolvendo até chegar no resultado final.

Exercício 40. Calcule a derivada de $f(x) = x^3$ em um ponto x_0 qualquer. ★

Exercício 41. Calcule a derivada de $f(x) = \cos(x)$ em um ponto x_0 qualquer. ★

Exercício 42. Calcule a derivada de $f(x) = |x|$ em um ponto x_0 qualquer, e mostre que essa função não é diferenciável em $x = 0$. ★

Você pode ter percebido que fazer todo esse processo (de tomar o limite) a cada vez que for performar a derivada de uma função seria muito custoso em termos de tempo. Por isso, existem tabelas de derivação para se consultar e aplicar para cada caso.

Entretanto, quando você está começando a aprender, é essencial se familiarizar com a forma de calcular pela definição, pra você entender o que você está fazendo, e depois de se convencer que está fazendo sentido, pode passar a usar as regras de forma direta.

Por exemplo, você calculou no exercício anterior que a derivada de $\cos(x)$ é $-\sin(x)$. Da próxima vez que uma derivada desse tipo aparecer, você não precisará fazer todo o cálculo novamente, basta usar o resultado, que é $-\sin(x)$.

Antes de mostrar uma tabela com as derivadas das funções elementares, as mais utilizadas, primeiro deixa eu te mostrar as propriedades da operação de derivar (a demonstração pode ser encontrada em [1]):

Propriedades das Derivadas

(i) $(\alpha f(x) \pm g(x))' = \alpha f'(x) \pm g'(x), \ \alpha \in \mathbb{R}$

(ii) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(iii) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

(iv) $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Lista de Derivadas

(i) $f(x) = x^n \implies f'(x) = nx^{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{R}$

(ii) $f(x) = \sqrt{x} \implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(iii) $f(x) = |x| \implies f'(x) = \dfrac{|x|}{x}$

(iv) $f(x) = a^x \implies f'(x) = a^x \cdot \ln(x), \ \forall a\colon\ 0 < a \neq 1$

(v) $f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x$

(vi) $f(x) = \log_a(x) \implies f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

(vii) $f(x) = \ln(x) \implies f'(x) = \dfrac{1}{x}$

(viii) $f(x) = \sin(x) \implies f'(x) = \cos(x)$

(ix) $f(x) = \cos(x) \implies f'(x) = -\sin(x)$

(x) $f(x) = \tan(x) \implies f'(x) = \sec^2(x)$

(xi) $f(x) = \sec(x) \implies f'(x) = \sec(x)\tan(x)$

(xii) $f(x) = \csc(x) \implies f'(x) = -\csc(x)\cot(x)$

(xiii) $f(x) = \cot(x) \implies f'(x) = -\csc^2(x)$

(xiv) $f(x) = \arcsin(x) \implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(xv) $f(x) = \arccos(x) \implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(xvi) $f(x) = \arctan(x) \implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Usando as propriedades e essas derivadas “tabeladas”, você consegue essencialmente calcular a derivada de qualquer função (muitas vezes você vai precisar aplicar mais de uma regra e/ou propriedade ao mesmo tempo). Agora que você já sabe o básico sobre derivação, podemos finalmente ver alguma aplicação física do que você aprendeu.

Regra de L'Hôpital

Teorema 28. *Se duas funções f e g são diferenciáveis em um intervalo aberto I, exceto possivelmente em um ponto $c \in I$, se*

(i) $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ *ou* $\pm\infty$

(ii) $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in I,\ x \neq c$

(iii) $\exists \lim_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

então, é verdade que

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{6.14}$$

□

Esse é um resultado poderoso do Cálculo, que ajuda bastante a resolver limites quando nos deparamos com indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, que são as mais comuns. Basicamente, se as condições de validade do teorema são satisfeitas, ele diz que o limite da razão das funções é igual ao limite da razão das derivadas das funções, o que geralmente vai ser suficiente para resolver a indeterminação. Observe um exemplo:

Exemplo 29. Usando a Regra de L'Hôpital, mostre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \tag{6.15}$$

Solução. As condições de validade do teorema são satisfeitas, porque chamando $\sin(x) = f(x)$ e $x = g(x)$, então notamos que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0$ e também $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$.
Além disso, $\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} (x)' = \lim 1 = 1 \neq 0$, e por fim

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1 \tag{6.16}$$

dessa forma,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 \tag{6.17}$$

como queríamos demonstrar. ▲

Exercício 43. Considere uma partícula que executa uma trajetória descrita pela função $x(t) = x_0 + v_o t + \alpha t^2$. Calcule a sua velocidade e aceleração instantânea, no instante $t = 2$ s. *Dados: velocidade instantânea é a derivada temporal da posição, e a aceleração instantânea é a derivada temporal da velocidade.* ★

Esse tipo de exercício será muito comum na disciplina de Física I, que você fará no início do curso de física na graduação. Outra aplicação bem utilizada da derivada é o fato dela ser capaz de fornecer os pontos de máximo e mínimo locais de uma função. Observe a Figura 34.

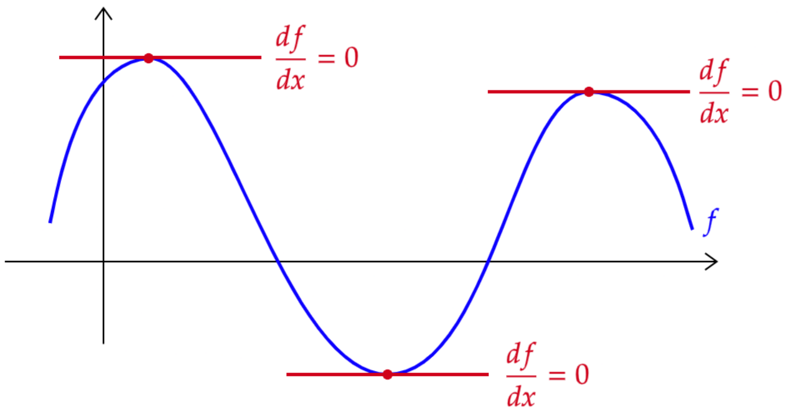


Figura 34: Recordando a interpretação da derivada enquanto coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função em um dado ponto, podemos perceber que nos pontos de máximo e mínimo da função a reta tangente é horizontal, ou seja, possui coeficiente angular nulo. Dessa forma, dada uma função, podemos determinar os seus pontos de máximo e mínimo resolvendo a equação $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 0$.

É importante enfatizar que através desse método só conseguimos encontrar os pontos de máximo e mínimo *local*, o que significa que só calculando a derivada você ainda não possui informação o suficiente para julgar se um dado ponto é onde a função é máxima ou mínima relativamente a todo o seu domínio (globalmente). Tudo que você ganha com isso é encontrar pontos que, relativamente às suas vizinhanças, simbolizam localidades extremas (de máximo ou mínimo).

Similarmente, através do cálculo da derivada nós podemos determinar se uma função está crescendo ou decrescendo em um dado ponto. É uma ferramenta muito útil para analisar o comportamento de grandezas físicas (que costumam ser representadas por funções) em um sistema. Acompanhe o exemplo seguinte:

Exemplo 30. Considere uma partícula cuja velocidade escalar é dada por $v(t) = \sin(t)$. Determine:

(a) Os instantes de tempo $t \geq 0$ em que a partícula possui velocidade máxima ou mínima.

(b) Se a velocidade da partícula está aumentando ou diminuindo em torno dos pontos $t = \pi$ e $t = 2\pi$.

Solução.

(a) Para tanto, resolvemos a equação $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin(t)) = \cos(t) = 0$. Dessa forma, $\cos(t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Como queremos apenas os $t \geq 0$, admitiremos todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, os instantes $\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \cdots\}$ caracterizam os pontos em que a velocidade é máxima ou mínima.

(b) Podemos avaliar isso calculando a derivada nos pontos de interesse, isto é analisando o sinal de $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=\pi}$ e $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=2\pi}$. Com efeito,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\Bigg|_{t=\pi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin(t))\Bigg|_{t=\pi} = \cos(t)\Bigg|_{t=\pi} = -1$$

Que possui sinal negativo, então, a velocidade da partícula está diminuindo em torno de $t = \pi$. Por outro lado,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\Bigg|_{t=2\pi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin(t))\Bigg|_{t=2\pi} = \cos(t)\Bigg|_{t=2\pi} = 1$$

Que possui sinal positivo, então, a velocidade da partícula está aumentando em torno de $t = 2\pi$.

▲

Nota 7. Em alguns casos pode ser conveniente empregar uma outra notação desenvolvida pelo Newton para a derivada, costumeiramente utilizada para derivadas temporais. Por exemplo, podemos escrever $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ como $\dot{v}$. Também podemos escrever derivadas de ordem superior, como $\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{v}$. Observe que uma derivada de ordem 2 significa simplesmente que você realizou a derivação duas vezes (primeiro em f, depois em $\dot{f}$). ♣

Um pouco mais pro final do curso de Física I, você aprenderá com mais cuidado a respeito de energia: aqui as derivadas também possuem aplicações recorrentes, para determinar se uma partícula se encontra em pontos de equilíbrio estável, instável ou indiferente. Observe a Figura 35.

Em primeiro lugar, os pontos de equilíbrio são pontos que *extremizam* a energia potencial, portanto para encontrá-los fazemos $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = 0$. Uma vez determinados os pontos x de equilíbrio, para classificar o tipo de equilíbrio em estável, instável ou indiferente precisamos calcular a derivada de segunda ordem $\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}$, que nos conta a respeito da *concavidade* da função em torno do ponto.

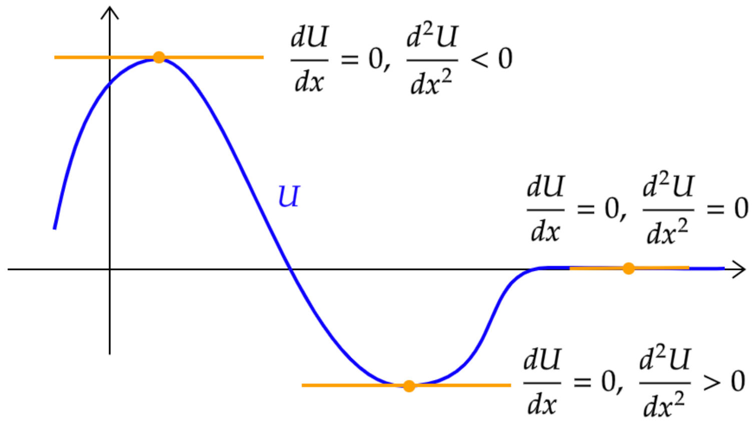


Figura 35: Dada a energia potencial de uma partícula, podemos determinar os pontos em que ela esteja em equilíbrio estável, instável e indiferente, utilizando as derivadas da energia potencial com relação a posição da partícula. Os pontos de máximo caracterizam equilíbrio instável (qualquer variação na posição a partícula escapa e não retorna para sua posição de equilíbrio), os pontos de mínimo caracterizam equilíbrio estável (variações pequenas o suficiente na posição da partícula fazem com que ela oscile em torno do ponto de equilíbrio) e os pontos cuja concavidade é nula (não são de máximo nem mínimo), caracterizam equilíbrio indiferente (apático a translações pela sua vizinhança).

Exercício 44. Considere uma partícula com energia potencial dada por $U(x) = (x+1)^2 + 5(x+1) - 24$. Encontre os seus possíveis máximos e mínimos locais e determine se são pontos de equilíbrio estável, instável ou indiferente. ★

Exercício 45. Sabendo que a energia potencial gravitacional de uma partícula de massa m devido a um corpo de massa M a uma distância x de m é $U(x) = -\frac{GMm}{x}$, mostre que a força gravitacional é dada por $F = -\frac{GMm}{x^2}$. *Dado: uma força conservativa (como a gravitacional) sempre pode ser obtida em uma dimensão através de* $F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$. ★

Exercício 46. Considere uma partícula cuja trajetória é dada pela função $x(t) = e^{-t^2}\sin\left(\frac{\ln(t)}{t} - \sqrt{t}\right)$. Determine sua velocidade instantânea, para um instante de tempo t_0 qualquer. *Observação: esse é um exercício para você treinar as diferentes regras de derivação que viu nesse curso. Como uma cortesia, forneço o gabarito deste para você conferir se acertou no final:*

$$v = -2te^{-t^2}\sin\left(\frac{\ln(t)}{t} - \sqrt{t}\right) - e^{-t^2}\left(-\frac{1}{t^2} + \frac{\ln(t)}{t^2} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\cos\left(\frac{\ln(t)}{t} - \sqrt{t}\right)$$

★

6.5 Noções de integrais

Assim como a derivação, a palavra "integração" pode não dar muito *insight* sobre o que ela significa no contexto do Cálculo, não é intuitivo como chegamos a pensar com continuidade e limites. Felizmente, a ideia de integral se origina de forma semelhante às derivadas: analisando limites de situações geométricas. Antes de tudo, é conveniente introduzir a ideia de *primitiva*.

Definição 31. A primitiva de uma função $f(x)$ é a função $F(x)$ tal que

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x) \tag{6.18}$$

♠

Aprendemos ao longo do ensino fundamental e médio a fórmula para a área de algumas figuras planas, como o retângulo, o círculo, o triângulo, o trapézio, etc. Nós estamos interessados em calcular a área de figuras mais complicadas; dito de outra maneira, dada uma função real arbitrária, queremos calcular a área abaixo dessa função, em algum intervalo do seu domínio. Por exemplo, podemos estar interessados em calcular a seguinte área:

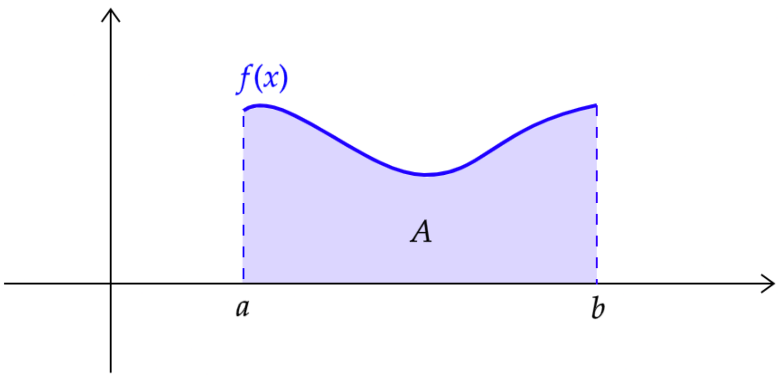


Figura 36: Área abaixo da função $f(x)$ no intervalo $[a,b]$.

Uma das formas de fazer isso é aproximando a área por retângulos, e é a que adotaremos aqui, por simplicidade e familiaridade que temos com eles. Isso significa que, inicialmente, vamos desenhar um número finito de retângulos abaixo da função, de modo a ir preenchendo a área real que desejamos obter por meio dos retângulos. Observe a Figura 37.

Talvez você esteja começando a suspeitar o que vamos fazer para encontrar a *área exata* abaixo do gráfico da função no intervalo desejado. Ora, se quanto maior for o número de retângulos melhor é a aproximação, então se tomarmos o limite da soma da área dos retângulos quando o número de retângulos tender ao infinito, teremos exatamente a área abaixo do gráfico.

Para fazermos isso, vamos considerar que o intervalo $[a,b]$ é *particionado* de forma regular. Em outras palavras, vamos dividi-lo em n partes iguais.

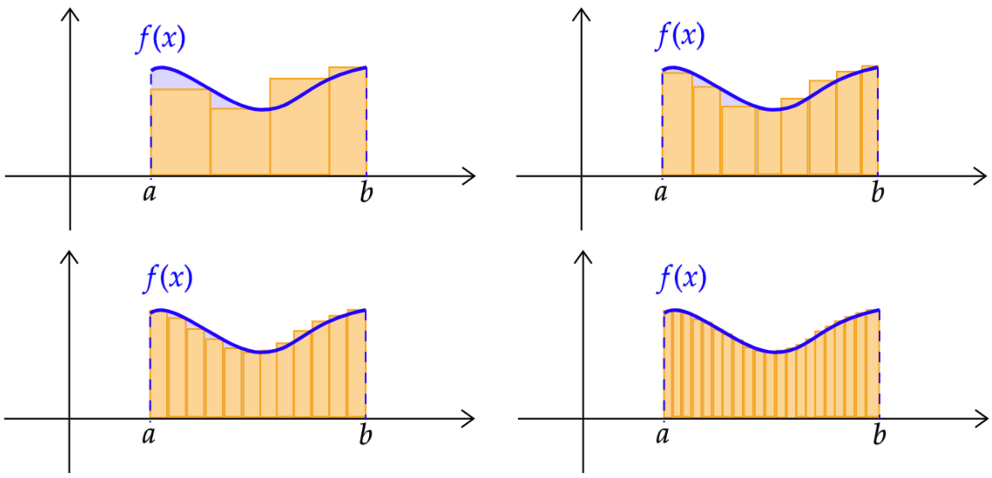


Figura 37: Aproximação da área abaixo do gráfico usando retângulos. Note que conforme aumentamos o número de retângulos que usamos para aproximar a área, melhor a nossa aproximação fica.

Cada parte terá, então, tamanho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, e a seguinte sequência de pontos (a partição) pode ser definida:

$$\mathbb{P} = \{a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n = b\} \tag{6.19}$$

onde $x_i = x_{i-1} + \Delta x$, com $i \in \{1, \cdots, n\}$. Pensando dessa forma, teremos n retângulos de base Δx e cada um terá uma altura $f(\xi_i)$ distinta, onde $\xi_i \in \{x_{i-1}, x_i\}$, ou seja, é qualquer ponto intermediário entre dois pontos consecutivos da partição, que determinam a base do respectivo retângulo (veja a Figura 38).

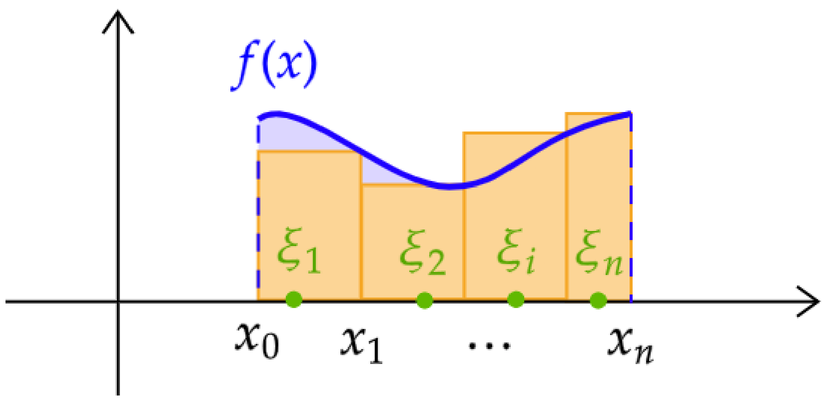


Figura 38: Partição regular do intervalo $[a,b]$ com a representação dos pontos intermediários ξ_i.

A razão para podermos escolher qualquer ponto intermediário desse subintervalo é porque quando fizermos o número de retângulos tender ao infinito ($n \to \infty$), isso significará que $\Delta x \to 0$ e, em particular, qualquer ponto intermediário no subintervalo tenderá a um mesmo ponto.[6] Preparado todo esse formalismo, podemos escrever a soma $\mathfrak{S}$ da área dos retângulos:

$$\mathfrak{S} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x \tag{6.20}$$

o que, uma vez tomado o limite quando $n \to \infty$, será equivalente a área $\mathfrak{A}$ abaixo do gráfico no intervalo desejado. Dessa forma,

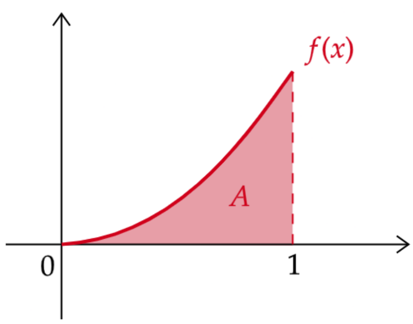
$$\mathfrak{A} = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{S} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x \tag{6.21}$$

esta última expressão, uma soma infinita, é batizada de *integral*, e costumeiramente denotada via

$$\mathfrak{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.22}$$

onde dx expressa um *diferencial*, dito de outra maneira, um comprimento infinitesimal (que seria o tamanho da base do retângulo quando tomamos o limite de $n \to \infty$), e os números a e b compõem o que chamamos de *intervalo de integração*.

Exemplo 32. Calcule a área abaixo do gráfico da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[0,1]$.



[6]Esse é um argumento sutil, recomendo que você tire um tempo para pensar a respeito do que acabei de dizer.

Solução. Para resolver esse problema, vamos dividir o intervalo $[0,1]$ em n partes iguais, ou seja, de tamanho $\Delta x = 1/n$. Consideraremos, também, que os retângulos construídos para aproximar a área abaixo do gráfico terão altura $f(\xi_i)$, onde adotaremos $\xi_i = x_i$, para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, ou seja, vamos nos guiar pela extrema direita do subintervalo. Assim, a soma da área dos retângulos é dada por

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S} &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x = (f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))\Delta x = \left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right)\Delta x \\
&= (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)\frac{\Delta x}{n^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6n^3} \\
&= \frac{2n^3}{6n^3} + \frac{3n^2}{6n^3} + \frac{n}{6n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}
\end{aligned}$$

onde usei a identidade[7] $(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Dessa forma, tomando o limite, temos

$$\mathfrak{A} = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{S} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3} \tag{6.23}$$

como queríamos mostrar. ▲

Assim como lidamos com as derivadas, esse caminho de construir a soma delicadamente e depois tomar o limite não vai ser o mais convencional, apesar de ser a definição da integral. Na prática, vamos utilizar diretamente as propriedades e os resultados das integrais mais comuns de funções elementares. Por outro lado, algumas integrais mais complexas exigirão *técnicas de integração* para serem simplificadas até as integrais de funções elementares às quais iremos criar familiaridade.

Integrais em que explicitamos o intervalo de integração são chamadas de *definidas*, mas também existem as *indefinidas*, quando não o fazemos. Nesse último caso, não estamos interessados na área abaixo do gráfico em um intervalo particular, mas sim de forma "genérica". Para levar em conta essa arbitrariedade, adicionamos no resultado final uma *constante de integração*, como no exemplo a seguir:

Exemplo 33. Uma das integrações mais comuns é a de uma função polinomial:

$$\int x^n \, \mathrm{d}x \tag{6.24}$$

[7] Uma demonstração para a mesma pode ser encontrada em [1].

seu resultado é dado pela expressão

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

mas lembramos que como não foi definido nenhum intervalo de integração, precisamos adicionar no final uma constante de integração, dessa forma:

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R} \tag{6.25}$$

▲

O resultado da integral indefinida de uma função qualquer é a sua primitiva adicionada de uma constante.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \tag{6.26}$$

Isto é, *a derivação é a operação inversa da integração!* Se conhecemos a primitiva de f, automaticamente temos a integral indefinida de f. Com efeito, vamos voltar por um momento para o exemplo anterior, e perceber que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = (n+1)\frac{x^n}{n+1} = x^n$$

isto é, $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ é a primitiva de x^n. Assim como podemos usar as primitivas para obter as integrais indefinidas, fazemos o mesmo com as integrais definidas porém com uma diferença para eliminar a ambiguidade da constante de integração, posto que um intervalo de integração será agora explicitado. O resultado desejado é dado pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema 34. *Se f for integrável em $[a,b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \equiv [F(x)]\Big|_a^b \tag{6.27}$$

□

Exemplo 35. Determine o valor da seguinte integral:

$$\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x$$

Solução. Note que $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ é primitiva de $f(x) = x^2$, porque $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3x^2}{3} = x^2$. Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} \tag{6.28}$$

▲

Exemplo 36. Determine o valor da seguinte integral:

$$\int_\pi^{2\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Solução. Note que $F(x) = \sin(x)$ é primitiva de $f(x) = \cos(x)$, porque $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin(x)) = \cos(x)$. Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_\pi^{2\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x = F(2\pi) - F(\pi) = \sin(2\pi) - \sin(\pi) = 0 \tag{6.29}$$

▲

Entretanto, você deve concordar comigo que nem sempre vai ser "trivial" encontrar a primitiva de uma função apenas pensando em que outra função, quando derivada, resulta na função original, para poder determinar a sua integral. Por essa razão, apresentarei algumas das propriedades mais importantes das integrais na página seguinte.

Além disso, também precisamos nos familiarizar com as integrais das funções elementares, que são as que mais usaremos na física. Por isso, disponibilizo logo após as propriedades das integrais uma lista com as integrais mais comuns.

Nesse começo de curso, você provavelmente estará calculando integrais da velocidade e da aceleração com respeito ao tempo, ou ainda da força com relação ao deslocamento para encontrar o trabalho.

Em geral, essas contas envolverão apenas integrais de funções elementares, e em uma dimensão. No curso de Cálculo I, II e III você aprenderá técnicas de integração para resolver integrais ainda mais gerais, em mais dimensões, com métodos que às vezes podem simplificar ou dificultar, porém por enquanto não precisa se preocupar tanto com isso.

Propriedades das Integrais

(i) A integral da soma é a soma das integrais

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{6.30}$$

(ii) Aditividade com respeito aos intervalos de integração

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.31}$$

(iii) Invariante por translação do intervalo de integração

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,\mathrm{d}x, \;\; c \in \mathbb{R} \tag{6.32}$$

(iv) Expansão ou contração do intervalo de integração

$$\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)\mathrm{d}x = k \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \;\; k \in \mathbb{R}_+^* \tag{6.33}$$

Lista de Integrais

(i) $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

(ii) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(x) + C$

(iii) $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$

(iv) $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$

(v) $\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$

(vi) $\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$

(vii) $\int \sec^2(x)\,\mathrm{d}x = \tan(x) + C$

(viii) $\int \csc^2(x)\,\mathrm{d}x = -\cot(x) + C$

(ix) $\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x| + C$

(x) $\int \cot(x)\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

(xi) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$

(xii) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$

2

Exemplo 37. Determine o valor da seguinte integral:

$$\int (2e^x + \sec^2 x)\,\mathrm{d}x$$

Solução. Pela propriedade da soma,

$$\int (2e^x + \sec^2 x)\,\mathrm{d}x = 2\int e^x\,\mathrm{d}x + \int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = 2e^x + \tan x + C$$

▲

Exemplo 38. Mostre que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Solução. Pela propriedade da aditividade com respeito aos intervalos de integração,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

como queríamos demonstrar. ▲

Grande parte das equações que você encontrará em física serão equações diferenciais (ou seja, equações que envolvem as derivadas de alguma grandeza). Um método que costuma funcionar de forma direta nos casos mais simples para resolver tais equações é realizar uma ou mais integrações consecutivas. Então, por exemplo, se você conhece a velocidade instantânea de uma partícula e deseja obter a sua posição em função do tempo, podes lembrar que $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ e então, escrever

$$x(t) = \int v\,\mathrm{d}t \tag{6.34}$$

Da mesma forma,

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \implies v(t) = \int a\,\mathrm{d}t \tag{6.35}$$

Como as integrais são indefinidas, as constantes de integração são obtidas através das condições iniciais, caso desejemos obter uma solução única para o problema dado. Por exemplo, se nos é dada a posição inicial do projétil, quando calculamos $x(t)$ podemos avaliar a função em $t = 0$, isto é, $x(0)$, e isolar a constante C, substituindo na expressão para qualquer instante t posteriormente.

Exercício 47. Considere um projétil em lançamento vertical para baixo, cuja aceleração é dada por g. Determine a sua velocidade e posição instantânea, dado que ele parte de uma posição inicial x_0 e uma velocidade inicial v_0. ★

Exercício 48. Determine o trabalho da força $F = -\frac{kx^2}{2}$, onde $k \in \mathbb{R}$, aplicada em um bloco que se desloca de $x = 4$ m até $x = 0$ m. *Dado: o trabalho de uma força, em uma dimensão, é calculado através de* $W = \int_a^b F \, \mathrm{d}x$. ★

Exercício 49. Demonstre, em uma dimensão, o teorema do trabalho-energia cinética, isto é, mostre que

$$W = \Delta E_c = \frac{m(v_f)^2}{2} - \frac{m(v_i)^2}{2} \tag{6.36}$$

Dica: lembre-se da segunda lei de Newton $F = ma$ e integre dos dois lados com relação a posição. Do lado esquerdo você terá a definição de trabalho, e do lado direito você precisa manipular para chegar no resultado a ser demonstrado. ★

Assim encerramos o que eu desejava ensiná-lo sobre integrais. Como sempre, se você tiver vontade de aprender em mais detalhes como funcionam essas coisas, ir atrás das demonstrações para alguns resultados que aqui eu apenas enunciei e coisas assim, sempre podes consultar alguns dos livros canônicos de cálculo (como o Guidorizzi ou o Apostol).

Palavras Finais

Chegamos ao fim do que preparei para esse minicurso. Eu espero que o objetivo de relembrar e aprofundar os conteúdos que você viu no ensino médio além de introduzir novos conceitos relativos ao pré-cálculo tenha sido cumprido, e que você tenha conseguido compreender bem esse início do cálculo diferencial e integral. Durante o curso de Cálculo I na graduação vocês verão abordagens ainda mais rigorosas para esses assuntos que eu trouxe aqui.

Para mim, o maior diferencial do minicurso foi eu ter procurado dar motivações físicas no início de cada seção e também ao longo do texto para tudo que estávamos fazendo, ou ao menos justificar que você estava dedicando seu tempo para coisas que seriam de uma forma ou de outra, úteis para a física. Eu devo enfatizar que nem sempre as coisas precisam ser assim, e te encorajo a ver matemática com outros olhos, procurar estudá-la por sua própria beleza e ir pegando o jeito aos poucos com as abstrações e o rigor.

Na página seguinte você encontrará a bibliografia principal que me inspirei para escrever essas notas, se você desejar escolher alguns deles para revisar pré-cálculo ou estudar cálculo, separo-os aqui por categoria:

- Pré-Cálculo: [3], [4], [5], [6], [8], [9].
- Cálculo: [1], [2], [7], [10], [11], [12].

Ainda, por último você também pode ler os apêndices que escrevi para ajudar com a disciplina de Cálculo I e um Glossário de Símbolos Matemáticos, para quem tem alguma dificuldade em entender o que alguns deles significam. Obrigado por ler até aqui, espero ter ajudado! Nos vemos pelo mundo da física =)

> "Para mim nunca houve na Terra uma fonte de honra ou distinção maior do que realizar avanços na ciência."
>
> Sir Isaac Newton

Bibliografia

[1] T. M. Apostol. *Calculus - Volume 1*. Wiley, 1991. ISBN: 9780471000051.

[2] H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo - Volume 1*. LTC, 2018. ISBN: 9788521635437.

[3] G Iezzi. *Fundamentos de matemática elementar - Volume 3: Trigonometria*. Saraiva Didáticos, 2019. ISBN: 9788535716849.

[4] G Iezzi. *Fundamentos de matemática elementar - Volume 4: Sequências, matrizes, determiantes e sistemas*. Saraiva Didáticos, 2019. ISBN: 9788535717488.

[5] G Iezzi. *Fundamentos de matemática elementar - Volume 6: Complexos, polinômios e equações*. Saraiva Didáticos, 2019. ISBN: 9788535717525.

[6] G. Iezzi e C Murakami. *Fundamentos de matemática elementar - Volume 1: Conjuntos e funções*. Saraiva Didáticos, 2019. ISBN: 9788535716801.

[7] D. Kleppner. *Quick Calculus: A Self-Teaching Guide*. Wiley, 1985. ISBN: 9780471827221.

[8] Elon Lages. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1*. SBM, 2016. ISBN: 9788583370901.

[9] A. C. M. Neto. *Tópicos da Matemática Elementar - Volume 1*. SBM, 2013. ISBN: 9788585818807.

[10] N. Piskunov. *Differential and Integral Calculus*. Mir Publishers, 1969. ISBN: 9780714710488.

[11] S. R. A. Salinas. *Introdução elementar às técnicas do calculo diferencial e integral*. USP, 2020. ISBN: 9788529200095.

[12] M. Spivak. *Calculus*. Publish or Perish, 2008. ISBN: 9780914098911.

Apêndice A: Conselhos para estudar matemática

Quando eu estava fazendo Cálculo I, infelizmente tive o desprazer de não possuir nenhum tipo de suporte apropriado do meu professor, que nem mesmo estava dando aulas na época por conta da pandemia do COVID-19, mas era o professor que estava responsável pela minha turma. Por esse motivo, na maior parte do tempo eu estava estudando cálculo por conta própria.

Felizmente, eu tive bons colegas de classe na graduação, mesmo em tempos virtuais, com quem criei amizade e tornou tudo mais leve, porque compartilhávamos das mesmas dificuldades e suportávamos uns aos outros. Resolvíamos listas juntos, fazíamos revisão antes das provas juntos, e sempre que algum estava com uma dúvida que não dava pra resolver, este tentava "jogar na roda" para os colegas ajudarem e geralmente as coisas acabavam dando certo no final. Além disso, eu também tive a sorte de fazer alguns bons amigos veteranos quando comecei o curso, que me ajudavam com os problemas mais difíceis e os "baques" conceituais mais pesados, além de orientarem e darem bastante conselhos sobre a disciplina e o curso de física de forma geral.

Baseado nisso, minha primeira sugestão para você é que não seja tímido: faça amizades com as pessoas que estudam com você e também com os mais velhos que estejam dispostos a te ajudar. Ciência em geral e física em particular não é feita por gênios solitários, mas sim por colaboração contínua de pessoas. Por essa razão, mesmo em disciplinas mais matemáticas como o Cálculo I, será legal ter essas pessoas por perto, cuja amizade pode tomar proporções maiores até do que a própria graduação.

Em segundo lugar, apesar de eu ter entrado na graduação com uma boa base de pré-cálculo e tendo estudado bastante coisa sobre cálculo no meu ensino médio, eu ainda era bem ruim em fazer as coisas de forma rigorosa. Eu cheguei com boa intuição, mas sem tanta prática em dissertar de forma lógica, ser preciso e objetivo (com efeito, até hoje eu ainda sou um pouco prolixo). Isso fez com que eu tivesse bastante dificuldade em resolver as listas e as provas, porque apesar de saber minimamente bem o que estava acontecendo, eu não sabia exatamente a melhor forma de arranjar aquelas palavras e ideias para mostrar o meu raciocínio. Essa é uma dificuldade super comum no início da graduação, mas a parte boa é que é algo que se resolve com a prática.

O ato de escrever uma demonstração é algo extremamente *técnico*, no sentido de que uma vez que você cria familiaridade com as *técnicas*, os métodos, os padrões de dissertação, não vai ser tão difícil de conseguir argumentar a favor do seu raciocínio e justificar as suas respostas. Acontece que a maioria de nós não pega o jeito dessas coisas no ensino médio, e por outro lado já é cobrado de início na graduação — a transição não é nada suave. Por essa razão, geralmente cria-se uma sensação de culpa ou síndrome do impostor e se for esse o seu caso, pode tranquilizar.

De toda a forma, a minha segunda indicação pra você é não ter medo de estudar matemática de forma rigorosa. No começo talvez seja um pouco chato e doloroso porque é algo que você provavelmente não vai saber fazer com tanta segurança, mas é a forma mais apropriada de te fazer aprender que eu conheço. Leia as passagens com calma, discuta com os seus colegas se alguma coisa não tiver ficado clara, e preste bastante atenção na forma como o autor dos textos que você ler emprega a escrita, a dissertação — procure por padrões, e tente encontrar uma lógica por trás deles, assim replicando nas suas próprias demonstrações!

Com isso em mente, a próxima indicação é a respeito da forma de estudar matemática. Metodologia de estudo é algo extremamente pessoal, talvez o que funcione para mim pode não funcionar pra você, mas sabendo que potencialmente pode te ajudar a se encontrar, eu irei compartilhar com você. O que eu gosto de fazer é manter um caderno exclusivamente para anotações de matemática e, durante a leitura dos livros, ir anotando passagens que eu julgar relevantes, escrevendo definições, proposições, teoremas e demonstrações com as minhas próprias palavras sempre que é possível, procurando enxergar lógica nas conclusões que o autor faz, etc. Apenas o ato de escrever ainda é insuficiente para te fazer aprender, mas é uma etapa fundamental do processo (na minha opinião). Depois disso, o que será conveniente é resolver exercícios (das listas do professor ou dos livros que você estiver adotando[8]).

A resolução dos exercícios é a principal etapa do aprendizado, você estará tentando aplicar o conhecimento teórico que obteve durante a leitura para resolver algum problema, o que envolve desenvolver uma linha de raciocínio e encontrar argumentos para defendê-la: um processo extremamente ativo. Ao finalmente encontrar a solução, você estará um pouco mais esperto naquele assunto, e dali em diante qualquer problema semelhante que você veja, já terá alguma noção de como começar.

Por fim, eu gostaria de te dizer para não ter medo de errar. Na maioria das vezes você vai precisar tentar resolver uma questão por vários caminhos que irão falhar, para só então encontrar o que vai dar certo. Criar experiência com o que não fazer faz parte para conseguir encontrar o que de fato fazer, não se esqueça disso. Brinque com os exercícios, adapte-os e tente resolver casos especiais, analisar essas variações vai te proporcionar um entendimento ainda mais profundo do conteúdo.

[8]Inclusive, aqui é relevante enfatizar que você pode e deve utilizar mais de um livro durante o seu processo de aprendizagem. Às vezes mesmo o seu autor preferido pode não dar a explicação mais esclarecedora em alguma parte do assunto, então, diversifique!

Apêndice B: Glossário de símbolos matemáticos

Símbolo	Significado	Exemplo
$\pm$	Mais ou menos	$x = 3 \pm 2 \implies x = 5$ ou $x = 1$
$\approx$	Aproximadamente igual	$\pi \approx e \approx 3$ (contém ironia)
$\equiv$	Definido	$L \equiv \lim f(x)$
$\cup$	União	$]-\infty, 0] \cup]0, +\infty[= \mathbb{R}$
$\cap$	Interseção	$[1,4] \cap [2,6] = [2,4]$
$\emptyset$	Conjunto Vazio	$A \cap B = \emptyset$
$\in$	Pertence ao conjunto	$a \in \mathbb{R}$
$\subset$	Está contido no conjunto	$A \subset B$
$\exists$	Existe	$\exists \delta > 0$
$\exists!$	Existe um único	$\exists!\ L = \lim f(x)$
$\forall$	Para qualquer que seja	$\forall x \in D_f$
$\implies$	Implica em	$\|x-p\| < \delta \implies \|f(x) = f(p)\| < \epsilon$
$\iff$	Se, e somente se	$a + b = 0 \iff a = -b$
$\to$	Tende a	$x \to 0$
$:$	Tal que	$f(x) = \{x \in \mathbb{R} \colon x > 2\}$